

١٢



حکومەتی هەرێمی کوردستان - عێراق
وەزارەتی پەرۆدرە - بەڕێوەبەرایەتی گشتی پرۆگرام و چاپەمەنیەکان

بیرکاری بو ههمووان

کتیبي خويندکار
پۆلی دوازدەهەمی زانستی

چاپی شەشەم
٢٠١٥ ز / ٢٧١٥ کوردی / ١٤٣٦ ک

سہرپہرشتی ہونہری چاپ

عوسمان پیرداود کواز

ناری محسن احمد

ويّنه پروونکردنەوهييهكان و نموونه هيلّيهكان

Graphs and Linear Models

3 ئايا تۆ ئامادهيت؟ **Are You Ready?**

4 1-1 ويّنه پروونکردنەوهييهكان Graphs

2-1 نموونه هيلّيهكان و تيكراي گۆرانهكان

12 Linear Models and Rates of Change

21 **Partial Test** (وانهكان 1-2) تاقىکردنەوهى نيوهى بهش

22 3-1 نهخشهكان و پروونکردنەوهكانيان Functions and Their Graphs

33 پيڤاچوونەوهى بهش **Review**

35 ئامادهكارى بۆ تاقىکردنەوه **Test Prep**

ئامانجەكان

Limits

39.....	ئايا تۆ ئامادەيت؟ Are You Ready?	
	دەروازەيەك بۆ ھەژمارکردنى جياكارى و تەواوكارى	1-2
40.....	Introduction to Calculus	
	دۆزىنەۋەي ئامانجەكان بە پروونکردنەۋەيى و ژمارەيى	2-2
46.....	Finding Limits Graphically and Numercially	
56.....	Finding Limits ئامانجەكان	3-2
61.....	Partial Test (۱-3 وانهكان) تاقىکردنەۋەي نيوەي بەش	
62.....	Continuous Functions نەخشە بەردەوامەكان	4-2
68.....	Infinite limits ئامانجە بېپايانەكان	5-2
74.....	Review پىداچوونەۋەي بەش	
76.....	Test Prep ئامادەكارى بۆ تاقىکردنەۋەي	

داتاشراو

Derivative

79.....	ئايا تۆ ئامادەيت؟ Are You Ready?	
80.....	داتاشراو و بابەتى لىكەوت Derivative and the Tangent Problem	1-3
86.....	رېساي داتاشراو Differentiation Rules	2-3
96.....	تاقىكرىدەنەوى نىوھى بەش (وانەكان 1-2) Partial Test	
	داتاشراوى خۆبەخۆ و داتاشراو بەرزەكان	3-3
97.....	Implicit Differentiation and Higher Derivative	
104	تېكرى گۆرەنەكان Rates of Change	4-3
112.....	پىداچوونەوى بەش Review	
114	ئامادەكارى بۆ تاقىكرىدەنەوى Test Prep	

جىبەجىڭردنى داتاشراو

Applications of Differentiation

117	ئايا تۆ ئامادەيت؟ Are You Ready?	
118	First Derivative Test جىبەجىڭردنەكانى داتاشراوى يەكەم	1-4
126	Second Derivative Test جىبەجىڭردنەكانى داتاشراوى دووهم	2-4
131	Limits at Infinity ئامانجەكان لە بىپايان	3-4
138	Partial Test (وانەكان 1-3) تاقىڭردنەوى نيوەى بەش	
139	Curve Sketching وىنە پروونڭردنەوىيەكانى نەخشە	4-4
148	Optimization گەران بەدواى بەها كۆتايىيەكاندا	5-4
154	Review پىداچوونەوى بەش	
156	Test Prep ئامادەكارى بۆ تاقىڭردنەوى	

تەواوکارى

Integration

159	ئايا تۆ ئامادەيت؟ Are You Ready?	
160	Indefinite Integral تەواوکارى بېسنور	1-5
166	Definite Integral تەواوکارى سنوردار	2-5
174	Partial Test (وانەكان 1-2) تاقىكرىنەۋەى نىۋەى بەش	
175	Integration Methods ھەژماركرىنى تەواوکارى	3-5
178	Applications of Integral جىبەجىكرىنەكانى تەواوکارى	4-5
183	Review پىداچوونەۋەى بەش	
185	Test Prep ئامادەكارى بۆ تاقىكرىنەۋەى	

برگه قوچه كيهكان

Conic Sections

187	ئايا تۆ ئامادەيت؟ Are You Ready?	
188	Conic Sections	1-6
200	Classifying Conic Sections	2-6
204	Partial Test (1-2)	
		ئاڭلىرىڭىزنىڭ ئىسمى (ئانەكان 1-2)	
		ھاۋا كىشە دوۋجا يەكان بە دوۋ گۇرۇپ	3-6
205	Quadratic Equations in 2 Variables	
210	Review	
212	Test Prep	

ژمارە ئاویتەکان و ئەندازە

Complex Numbers And Geometry

215	ئایا تۆ ئامادەیت؟ Are You Ready?
1-7	شیۆه جیاوازهکانی ژمارەى ئاویتە
216	Various Forms of a Complex Number
223	ژمارە ئاویتەکان و ئەندازە Complex Numbers and Geometry
2-7	
229	پیداچوونهوهى بەش Review
230	ئامادەکاری بوۆ تاقیکردنهوه Test Prep

وئە پروونکردنە ۋە يەكەن و نموونە هەلەكەكەن

Graphs and Linear Models

بەشى يەكەم

ۋانەكەن

1-1 وئە پروونکردنە ۋە يەكەكەن

2-1 نموونە هەلەكەكەن و تەكەرەي
گۆرەنەكەن

تەكەرەكەن ۋە نەوئەي بەش

3-1 نەخەشەكەن و
پروونکردنە ۋە كەنەن

پەداچوونە ۋە

نامادەكەري بۆ تەكەرەكەن ۋە

نموونە هەلەكەكەن لەو نموونە دادەنرێت كە بە
فراوانی بۆ ۋە ۋە بەكار دەهێنرێت لە بۆري
تەبۆري و پەشەسازي و هەروەها لە بۆري
زانستییەكەني تر، نموونەش لەسەر ئەمە، ئەو
نموونەيەكە پانی هەردوو بۆلي فرۆكە w و
بە درێژیەكە l بە ياسای $w = 1.2l - 60$
دەبەستێتە ۋە بۆ هەندێك جۆر لە فرۆكەكەن.

ئايا تۆ ئامادەيت؟

زاراۋەكان ✓

1. ھەر دەستەۋازىيەكى ستوونى لاي راست بە لىكدانەۋەكەى لى ستوونى لاي چەپ بىستەۋە.
 2. نەخشە
 3. گۆپراۋى ئازاد
 4. گۆپراۋى پەيۋەست
 5. بۈرى نەخشەى f
 6. نەخشەى پىسا پەلدار
 7. گۆپراۋىكە بەھايەكانى x كە پىگا بە ھەژماركردنى بەھاي $f(x)$ دەدات.
 8. گۆپراۋىكە بەھايەكەى بەپىى بەھاي گۆپراۋى ئازاد لى پەيۋەندىيە نەخشەيىكە دياردەكرىت.
 9. نەخشەيەكە پىسايەكەى بەشۋەى جىاجىا لى ماۋەى جىاجىادا پىناسە دەكرى.
 10. پەيۋەندىيە لى نىۋان دوو گۆپراۋ كە بەھاي ھەر يەككىيان بەتەنھا يەك بەھا بۆ ئەۋى تريان ديارىدەكات.
 11. كۆمەلەى بەھايەكانى $f(x)$ كە لى تۋانادايە.
 12. گۆپراۋىكە بەھايەكانى گۆپراۋى پەيۋەست لى پەيۋەندىيەكى نەخشەيىدا ديارىدەكات.

بۈرى نەخشە ✓

لى راھىئانى 2 تا 7 ، بۈرى نەخشەكە بدۆزۈ.

$$f(x) = -2 + \sqrt{1-x} \quad 3$$

$$f(x) = |x-1| + 2 \quad 2$$

$$f(x) = \sqrt[3]{2-x} \quad 5$$

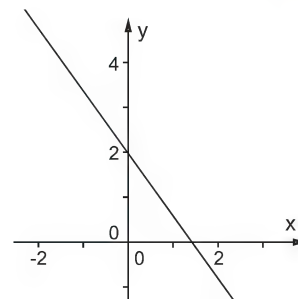
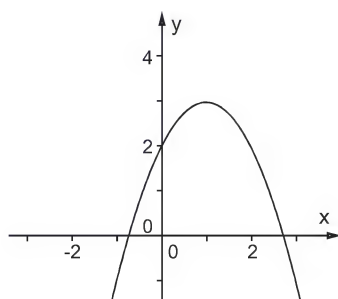
$$f(x) = \sqrt{16-x^2} \quad 4$$

$$f(x) = x^{2/5} \quad 7$$

$$f(x) = \tan x \quad 6$$

خویندەۋەى پۈنكردەۋەكان ✓

لى راھىئانى 8 و 9 ، پىساي نەخشە پەلدارى پۈنكردەۋەكە بنۈسە.



وینە روونکردنەو هیەکان Graphs

1-1



رېنیه دیکارت (1650-1596)
René Descartes

دیکارت بەشداریەکی کاریگەر کردووە لە
پیشخستنی فەلسەفە و زانست و بیرکاری و بیرۆکەیی
نوواندن خال وەک جووتە پیکراویک لە پووتەخت و
نوواندن چەماوەکان بە هاوکیشتە جەبری و بە
پێچەوانەو بۆ ئەو دەرگە پێتەووە. ئەو بیرۆکانە لە
کتێبەکی خۆی La Géométrie باسکردووە کە
سالی 1637 بڵاوکراوەتەو.

روونکردنەو هی نهخشه

سالی 1637 زانای بیرکاری فەرەنسی رېنیه
دیکارت شوپشیکى لە لیکنۆلینەو هی بیرکاری
بەرپاکرد، کاتیک هەردو لقه سەرەکیەکی
بیرکاری (جەبر و ئەندازە) ی بەیەکەو بەستەو،
ئەمەش وایکرد بە بەکارهێنانی پووتەختە
پۆتانهکانی دیکارت بتوانین جەبریەنە چەمکە
ئەندازەییەکان دەربری و چەمکە جەبریەکان
ئەندازەییانە بنوینین. ئەم لیکنزیکبوونەو بەهێزە
زۆر لە بابەتەکانی هەژمارکردنی جیاکاری و
تەواوکاری لەماوەی سەدەیکە پیشخست.

ئامانجەکان

- پوونکردنەو هی پەيوەندی بە
پێی هاوکیشتەکی دەکیشت.
- یەکتەریپنەکانی
پوونکردنەو هی نهخشە لەگەڵ
تەویری پۆتانهکان
دەدۆزیتەو.
- هاوچییوونی پوونکردنەو هی
نەخشە بە دەوری تەویری y
یان خالی بنەپەت لە
پووتەختی پۆتانهکان
تاقیدەکاتەو.
- خالەکانی یەکتەریپنی
پوونکردنەو هیەکانی دوو
نەخشە دەدۆزیتەو.

لەم کتێبەدا بەدوای ئەو لیکنزیکبوونەو دادەچین کە هاوکیشتەو مانە لە جیاکاری و
تەواوکاریدا. و بیرۆکەکانی ئەو لقهی بیرکاری بە پوونکردنەو هی و بەجەبری و بە ژمارەیی
دەخەینەپوو، بۆئەو لە چەمکە بنچینەییەکانی بگەیت، هاوکیشتە $3x + y = 7$ بەکارهێنە کە (2, 1)
خالی شیکاری ئەو هاوکیشتە پێکدەهێنێت، چونکە بە لەجیاتیدانانی x بە 2 و y بە 1 هاوکیشتە
پاسادان دەکات. ئەم هاوکیشتە چەندین شیکاری تری هەیە وەک (1, 4)، (0, 7). بۆ ئەو هی هەموو
شیکارەکانی بدۆزیتەو. هاوکیشتە بەپێی y شیکاریکە:

زاراوەکان Vocabulary

خالی شیکار
Solution point

خشتە بەهایەکان
Table of values

یەکتەریپنی ئاسویی
x-Intercept

یەکتەریپنی ستوونی
y-Intercept

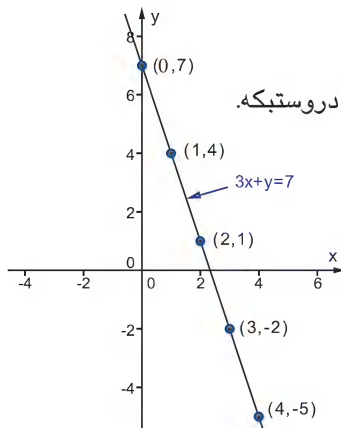
لاری
Slope

هاوچییوون
Symmetry

خالی یەکتەریپن
Point of intersection

نموونە هێلیبەکان
Linear Models

$$y = 7 - 3x \quad \text{لیکنزیکبوونەو هی جەبری}$$



پاشان خشتە بەهایەکان بە لەجیاتى دانانی چەند بەهایە بۆ x دروستیکە.

لیکنزیکبوونەو هی
ژمارەیی

x	0	1	2	3	4
y	7	4	1	-2	-5

بەپێی خشتە دەتوانیت بلیت کە (0, 7) (1, 4) (2, 1) (3, -2) (4, -5)
شیکارن بۆ هاوکیشتە سەرەکی $3x + y = 7$.

بەلام ئەم هاوکیشتە وەک زۆربەیی هاوکیشتەکان ژمارەییکی

ناکووتا شیکاری هەیه و هەر شیکاریک خالیک لە پووتەختی پۆتان دیاریدەکات.
کۆمەلەى ئەو خالە شیکاریانە پوونکردنەو هی هاوکیشتە پێکدەهێنێت.

لەم کتێبەدا زۆر پێگا بۆ کیشتانی پوونکردنەو هی نهخشەکان و هاوکیشتەکان فێردەبیت، لەو پێگایانە
و ئاسانترینیان دیارکردنی چەند خالیکى شیکارە بەسە بۆ دیارکردنی شیوەی پوونکردنەو هە،
پاشان ئەو خالانە بە هێلی گونجاو پێکبەهێنە.

لەبەرت بێت

بۆ وینەکیشتانی
پاستەهێلیک پێویستە بە
زانینی دوو خال کە
پێیاندا دەپوات.

نمونه 1

کیشانی وینهی پوونکردنهوهی بهخالهکان

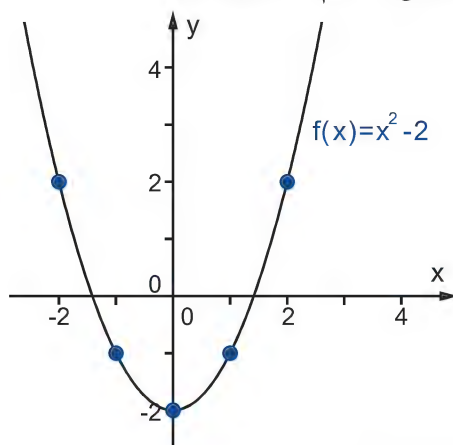
وینهی پوونکردنهوهی نهخشهی $f(x) = x^2 - 2$ بکیشه.

شیکار

به دروستکردنی خستهی بههاکان دهستیپیکه.

x	-2	-1	0	1	2	3
y	2	-1	-2	-1	2	7

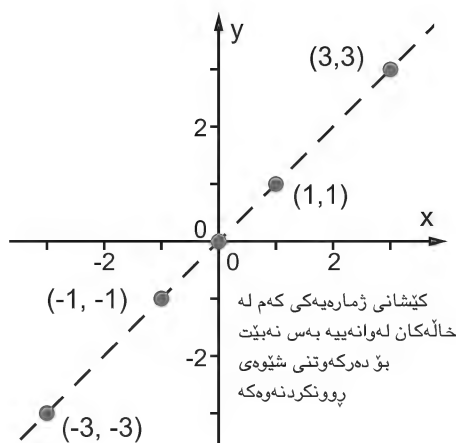
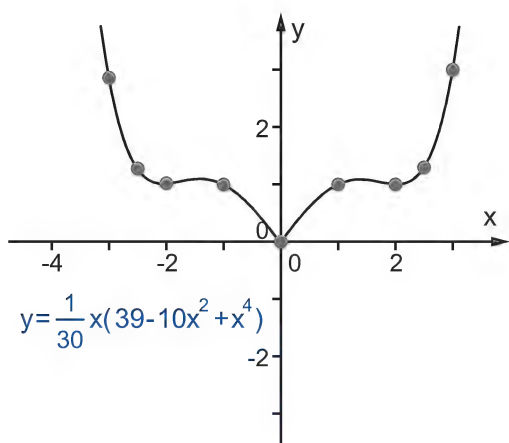
خالهکانی خستهکه بنوینه، له پاشاندا به هیلکی چهماوهی گونجاو به یهکیان بگهینه، وهک له وینهی بهرامبهر دهردهکهویت. ئه پوونکردنهوهی برهکی هاوتایه، که بریتییه له یهکیک له بره قوچهکییهکان که له بهشی شهشهم ئاشنای دهییت.



1. وینهی پوونکردنهوهی نهخشهی $f(x) = 1 - x^2$ بکیشه.



ههروهک بینیت کیشانی وینهی پوونکردنهوهی بهخالهکان کاریکی ئاسانه. بهلام ئهویش له کهمووکوپری بهدهرنییه. ههندیگ جار بوئهوهی بیرۆکهیهکی تهواوت لهسهه شیوهی پوونکردنهوهکه لا دروستبیت پیویستت به دیاریکردنی خالی زور دهییت، وهک چۆن له نمونهی $f(x) = \frac{1}{30}x(39 - 10x^2 + x^4)$ دهبینیت دیاریکردنی ژمارهیهکی کهم له خالهکان دهرئهجامیکی ههله له بارهی وینهکه بو دروست دهییت. ئهگه خالهکانی $(-3, -3)$ و $(-1, -1)$ و $(0, 0)$ و $(1, 1)$ و $(3, 3)$ دیاریکهیت وینهی پوونکردنهوهی نهخشهکه وهک هیلکی راست دهردهکهویت ههروهک چۆن له وینه پوونکردنهوهی لای راستی لاپههه دیار، بهلام بهدیاریکردنی خالی زیاتر بووت دهردهکهویت وینهی پوونکردنهوهکه له راستییدا ئالۆزتره لهوهی دهرکهوت ههروهک له وینهی پوونکردنهوهی لای چهپی لاپههه دیار.



يەكتىرىپىن لەگەل تەۋەرەكان

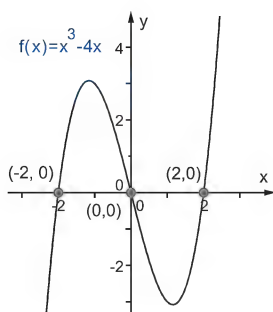
دەتۋانى لە خالە شىكارىيەكان ھەندىكىيان بە ئاسانى بدۆزىيەۋە ئەۋىش ئەۋ خالانەن كە يەككە لە پۆتۋانەكانى دەكاتە 0. بەۋ خالانە دەۋترىت خالەكانى يەكتىرىپىن لەگەل تەۋەرى پۆتۋانەكان. بەۋ خالەي پۆتۋانى يەكەمى x بىكەتە 0، واتە خالى $(0, b)$ دەبىتە خالى يەكتىرىپىن پوونكرىدەنەۋەي نەخشەكە لەگەل تەۋەرى y . كە دەكاتە يەكتىرىپىن ستوۋنى. ۋ ئەۋ خالانەي پۆتۋانى دوۋەمى دەكاتە 0، واتا خالى $(a, 0)$ دەبىتە خالى يەكتىرىپىن پوونكرىدەنەۋەي نەخشەكە لەگەل تەۋەرى x . كە دەكاتە يەكتىرىپىن ئاسۆيى.

پۆتۋانى x كە يەكتىرىپىنەكانى ئاسۆيى پوونكرىدەنەۋەي نەخشەي f دەنۆيتت برىتتەيە لە پەگەكانى ھاۋكېشەي $f(x) = 0$. لەۋانەيە نەخشەكە خالەكانى يەكتىرىپىن ئاسۆيى نەبىت يان يەك خال يان زىاتارى ھەبىت. بەلام يەكتىرىپىنەكانى ستوۋنى برىتتەيە لە $f(0)$ ئەگەر 0 لە بواری نەخشەدا بىت. لەمەۋە ۋ لە سىفەتەكانى نەخشە دەردەچىت، بۆ نەخشەيەك بە لايەنى زۆرەۋە يەك خالى يەكتىرىپىن ستوۋنى دەبىت.

دۆزىنەۋەي يەكتىرىپىنە ئاسۆيەكان ۋ ستوۋنىيەكان

نەۋە 2

يەكتىرىپىنە ئاسۆيەكان ۋ ستوۋنىيەكان بۆ پوونكرىدەنەۋەي نەخشەي $f(x) = x^3 - 4x$ بدۆزەۋە.



شىكار

بۆ دۆزىنەۋەي يەكتىرىپىنە ئاسۆيەكانى پوونكرىدەنەۋەي نەخشەي $f(x) = x^3 - 4x$. ئەم ھاۋكېشەيە شىكار بىكە.

$$f(x) = 0$$

$$x^3 - 4x = 0$$

$$x(x-2)(x+2) = 0$$

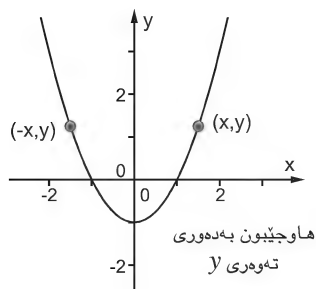
پەگەكانى ھاۋكېشەكە دەكاتە -2 ۋ 0 ۋ 2، واتە 3 يەكتىرىپىن ئاسۆيى ھەيە ئەۋانىش $(-2, 0)$ ، $(0, 0)$ ، $(2, 0)$. لەبەرئەۋەي 0 لەبواری نەخشەكە دايە، بۆيە پوونكرىدەنەۋەكە تەنھا يەك يەكتىرىپىن ستوۋنى ھەيە ئەۋىش $(0, f(0))$ ، $(0, 0)$.

2. يەكتىرىپىنە ئاسۆيەكان ۋ ستوۋنىيەكان بۆ پوونكرىدەنەۋەي نەخشەي

$$f(x) = x^4 - 1 \text{ بدۆزەۋە.}$$



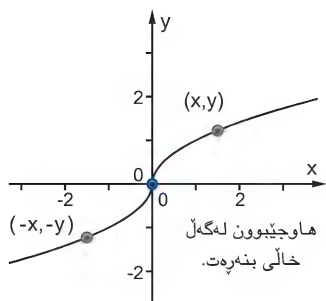
تەكنۆلۇژيا لە نموونەى 2 بۇ دۆزىنەوہى يەكتىرىپىنەكان پىگای جەبرىت بەكارهینا. ئەگەر لەتواناندا نەبوو بە بەكارهینانى جەبر يەكتىرىپىنەكان بدۆزىتەوہ، ئەوا پىگای پروونكردنەوہى بەكارهینە، بەدىارىكردى خالەكانى يەكتىرىپىنى پروونكردنەوہى نەخشەكە لەگەل دوو تەوہرى پۆتوانەكان.



هاوجىبوونى پروونكردنەوہى نەخشەكان

ئەگەر زانیت كە پروونكردنەوہى نەخشەكە لەگەل راستەهیلایك يان خالایك هاوجىيە، ئەمە وادەكات كىشانی پروونكردنەوہكە ئاسانتىيىت. ئەوئندە بەسە وینەى نيوہ پروونكردنەوہكە بكىشیت لە پاشاندا وینەكە بە بەكارهینانى هاوجىبوون تەواو بكەیت.

دەتوانى ئەم دوو جوړ هاوجىبوونەى خواروہ بەكارهینى.



1. هاوجىبوون لەگەل تەوہرى y: پروونكردنەوہى نەخشەى f

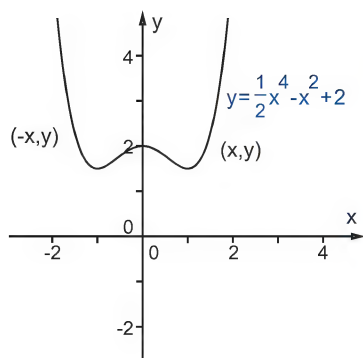
هاوجىدەبىت لەگەل تەوہرى y، ئەگەر f ئەم مەرجه $f(-x) = f(x)$ جىيەجىيەكات، بۆ ھەموو بەھايەكى x كە لەبوارى نەخشەكە دابىت، واتا كاتىك نەخشەكە جووتبىت.

2. هاوجىبوون لەگەل خالای بنەرەت: پروونكردنەوہى

نەخشەى f هاوجىدەبىت لەگەل خالای بنەرەت، ئەگەر f ئەم مەرجه $f(-x) = -f(x)$ جىيەجىيەكات، بۆ ھەموو بەھايەكى x كە لەبوارى نەخشەكە دابىت، واتا كاتىك نەخشەكە تاك بىت.

لەبىرت بىت

پادەى نەگۆر لە ھاوكىشەى نەخشەى پادەدار، برىتييە لە ئەنجامى لىكدانى ژمارەيكە لە $(x^0 = 1)$ ، 0 ژمارەيكەكى جووتە.



تاقىكردنەوہى هاوجىبوون

1. پروونكردنەوہى نەخشەكە هاوجىدەبىت لەگەل

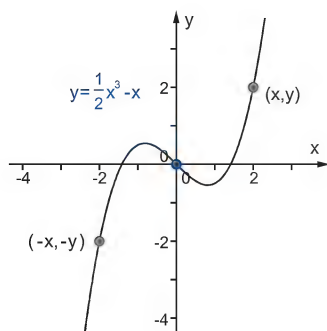
تەوہرى y ئەگەر نەخشەكە جووتبىت.

2. پروونكردنەوہى نەخشەكە هاوجىدەبىت لەگەل

خالای بنەرەت ئەگەر نەخشەكە تاك بىت.

لەبىرت بىت

پادەى نەگۆر لە ھاوكىشەى نەخشەى پادەدار، برىتييە لە ئەنجامى لىكدانى ژمارەيكە لە $(x^0 = 1)$ ، 0 ژمارەيكەكى جووتە.



پروونكردنەوہى نەخشەى پادەدار هاوجىدەبىت لەگەل تەوہرى

y، ئەگەر پلەكانى ھەموو پادەكانى ھاوكىشەكە جووتبىت

جگەلە پادە نەگۆرەكە. پروونكردنەوہى نەخشەى

$f(x) = \frac{1}{2}x^4 - x^2 + 2$ هاوجىدەبىت لەگەل تەوہرى y.

ھەرۋەھا پروونكردنەوہى نەخشەيكە پادەدار هاوجىدەبىت

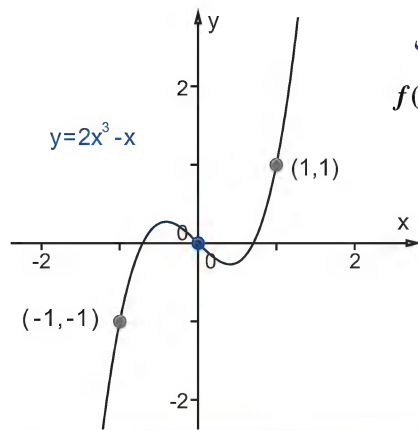
لەگەل خالای بنەرەت ئەگەر پادە نەگۆرەكەى ھاوكىشەكە

بكاتە 0 و پلەكانى ھەموو پادەكان لەو ھاوكىشەدا تاك بىت.

بۆنموونە: پروونكردنەوہى نەخشەى $f(x) = \frac{1}{2}x^3 - x$

هاوجىيە لەگەل خالای بنەرەت.

نمونه 3



تاقیکردنه‌وهی هاوجیبوون له‌گه‌ل خالی بنه‌په‌ت

پوونیکه‌وه که، پوونکردنه‌وهی نه‌خشه‌ی $f(x) = 2x^3 - x$ هاوجیبیه له‌گه‌ل خالی بنه‌په‌ت.

شیکار

ته‌ن‌ها دیاریکردنی تاک بوونی نه‌خشه‌که به‌سه.

$$\begin{aligned} f(-x) &= 2(-x)^3 - (-x) = -2x^3 + x \\ &= -(2x^3 - x) = -f(x) \end{aligned}$$

ئه‌مه‌ش بۆ‌ه‌موو به‌هایه‌کی x .

3. پوونیکه‌وه، پوونکردنه‌وهی نه‌خشه‌ی $f(x) = 2x^4 - x^2 + 2$ هاوجیبیه له‌گه‌ل ته‌وه‌ری y .



نمونه 4

به‌کاره‌یانی یه‌کترب‌پینه‌کان و هاوجیبوون بۆ کیشانی پوونکردنه‌وهی نه‌خشه‌کان.

پوونکردنه‌وهی نه‌خشه‌ی $f(x) = \frac{2x^2}{x^2 + 1} - 1$ بکیشه.

شیکار

پوونکردنه‌وه‌که هاوجیبیه له‌گه‌ل ته‌وه‌ری y چونکه نه‌خشه‌که جووته.

$$f(-x) = \frac{2(-x)^2}{(-x)^2 + 1} - 1 = \frac{2x^2}{x^2 + 1} - 1 = f(x)$$

ئه‌وه‌نده به‌سه نیوه‌ی پوونکردنه‌وهی نه‌خشه‌که بۆ به‌هایه موجه‌به‌کانی بکیشی. له‌پاشاندا نیوه‌که‌ی تر به وینه‌دانه‌وه له‌گه‌ل ته‌وه‌ری y بکیشیت.

یه‌کترب‌پینه‌کانی پوونکردنه‌وهی نه‌خشه‌که دیاریبکه.

یه‌کترب‌پینه ستوونیه‌کان: ده‌کاته خالی $(0, f(0))$ یان $(0, -1)$.

یه‌کترب‌پینه ئاسۆیه‌کان: پۆیسته شیکاری هاوکیشیه‌ی $\frac{2x^2}{x^2 + 1} - 1 = 0$ بکه‌یت.

هاوکیشیه‌ی $\frac{2x^2}{x^2 + 1} - 1 = 0$ پاش ساده‌کردن ده‌یته $x^2 - 1 = 0$.

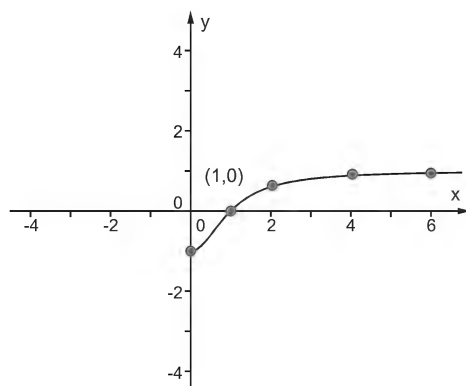
ئه‌م هاوکیشیه دوو په‌گی هیه ئه‌وانیش $x = 1$ و $x = -1$.

که‌واته نه‌خشه‌که، دوو یه‌کترب‌پینی ئاسۆیی هیه ئه‌وانیش $(-1, 0)$ و $(1, 0)$.

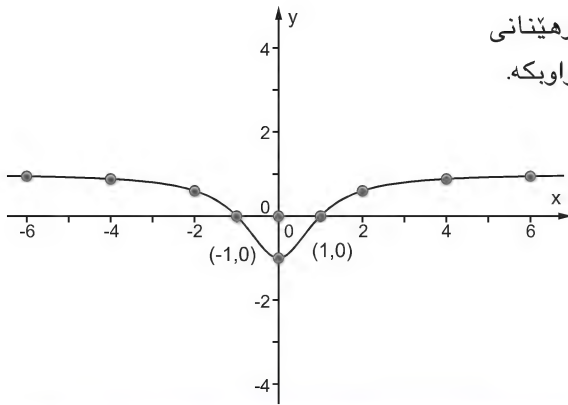
خاله‌کانی تر له‌سه‌ر به‌شی لای راستی پوونکردنه‌وه‌که دیاریبکه: $(2, f(2))$ یان $(2, \frac{3}{5})$ ، $(4, f(4))$ یان $(4, \frac{15}{17})$ ، $(6, f(6))$ یان $(6, \frac{35}{37})$.

نیوه‌ی لای راست بکیشه

(سه‌ریه به‌ها موجه‌به‌کانی x).



وینەى پروونکردنەوێكە بە بەكارهێنانى
وینەدانەوێكە لەگەڵ تەوێرى y تەواوبێكە.



4. وینەى پروونکردنەوێكە نەخشەى $f(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$ بکێشە.



دۆزینەوێكە خالەكانى يەكترپىنى دوو نەخشە

هەر خالێكى پروتەختى پۆتان لە نۆوان پروونکردنەوێكە دوو نەخشەكە هاوبەشە دەكاتە خالى
يەكترپىنى پروونکردنەوێكە ئەو دوو نەخشەيە. بۆ دۆزینەوێكە خالەكانى يەكترپىنى
پروونکردنەوێكە دوو نەخشە f و g ، هاوكێشەى $f(x) = g(x)$ شىكاربێكە. پێگەكانى ئەم
هاوكێشەيە بریتىيە لە پۆتانەكانى x بۆ خالەكانى يەكترپىن.

دۆزینەوێكە خالەكانى يەكترپىنى دوو نەخشە.

خالەكانى يەكترپىنى پروونکردنەوێكە نەخشەى $f(x) = x^2 - 3$ و $g(x) = x - 1$ بدۆزەوێكە.

5 نموونە

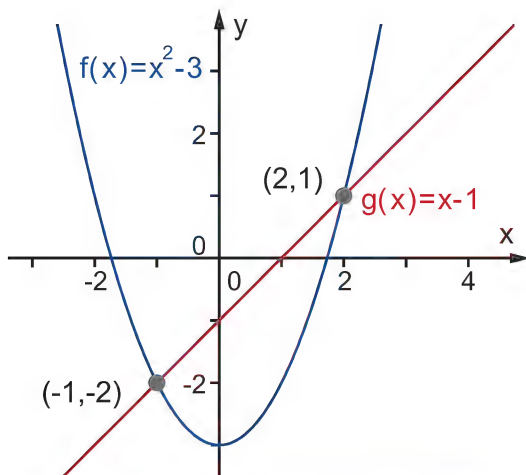
شىكار

دەستبێكە بە شىكارکردنى $f(x) = g(x)$ يان $x^2 - 3 = x - 1$ كە دەبێتە $x^2 - x - 2 = 0$.

ئەم هاوكێشە دووجايە دوو پێگە هەیە ئەوانیش $x = 2$ و $x = -1$. پروونکردنەوێكە ئەم دوو
نەخشەيە يەكترى دەبێن لە دوو خالى:

$$(-1, f(-1)) = (-1, g(-1)) = (-1, -2)$$

$$(2, f(2)) = (2, g(2)) = (2, 1)$$



ئەوێ دەستكەوت بەهۆى

پروونکردنەوێكە دوو نەخشەكە و

دیاریکردنى خالەكانى

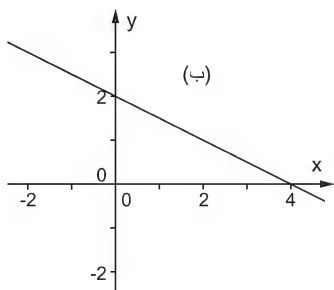
يەكترپىنىان پاسادان بێكە.

5. خالەكانى يەكترپىنى هەردوو پروونکردنەوێكە نەخشە $f(x) = x^3 - x$ و

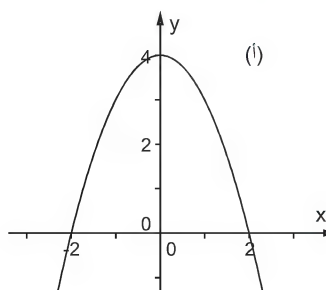
$$g(x) = \frac{1}{4}(x^2 - 1)$$



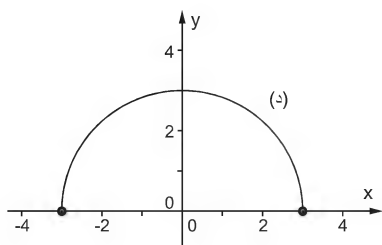
له پرسپاری 1 تا 4 پوونکردنه و دیاریکه نه خشه که دیاریکه.



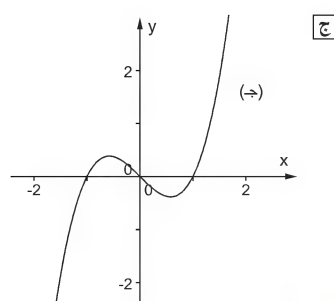
ب



ا



د



ج

$$f(x) = \sqrt{9 - x^2} \quad \boxed{2}$$

$$f(x) = -\frac{1}{2}x + 2 \quad \boxed{1}$$

$$f(x) = x^3 - x \quad \boxed{4}$$

$$f(x) = 4 - x^2 \quad \boxed{3}$$

له پرسپاری 5 تا 10 ، وینه پوونکردنه و دیاریکه نه خشه که به خاله کان بکیشه.

$$f(x) = |x + 2| \quad \boxed{7}$$

$$f(x) = (x - 3)^2 \quad \boxed{6}$$

$$f(x) = 6 - 2x \quad \boxed{5}$$

$$f(x) = \frac{1}{x-1} \quad \boxed{10}$$

$$f(x) = \frac{2}{x} \quad \boxed{9}$$

$$f(x) = \sqrt{x+2} \quad \boxed{8}$$

له پرسپاری 11 تا 14 یه کترپینی پوونکردنه و دیاریکه نه خشه که له گه ل دوو ته وری پووتانه کان بدوزه و.

$$f(x) = x^2 \sqrt{25 - x^2} \quad \boxed{12}$$

$$f(x) = x^2 + x - 2 \quad \boxed{11}$$

$$f(x) = \frac{x^2 + 3x}{(3x+1)^2} \quad \boxed{14}$$

$$f(x) = (x-1)\sqrt{x^2+1} \quad \boxed{13}$$

له پرسپاری 15 تا 20 دیاریکه، نه گهر پوونکردنه و دیاریکه نه خشه که له گه ل ته وری y یان له گه ل خالی بنه رت هاوچیه.

$$f(x) = \frac{4}{x} \quad \boxed{17}$$

$$f(x) = x^2 - x \quad \boxed{16}$$

$$f(x) = x^2 - 2 \quad \boxed{15}$$

$$f(x) = 1 - \sqrt{x+3} \quad \boxed{20}$$

$$f(x) = |x^3 + x| \quad \boxed{19}$$

$$f(x) = \frac{\sqrt{4-x^2}}{x} \quad \boxed{18}$$

له پرسپاری 21 تا 24 خاله کان یه کترپینی پوونکردنه و دیاریکه نه خشه که بدوزه و.

$$g(x) = 2x - 1 \text{ و } f(x) = 2 - x \quad \boxed{21}$$

$$g(x) = 4 - x \text{ و } f(x) = 6 - x^2 \quad \boxed{22}$$

$$g(x) = -x^2 + 3x - 1 \text{ و } f(x) = x^3 - 2x^2 + x - 1 \quad \boxed{23}$$

$$g(x) = 6 - x \text{ و } f(x) = -|2x - 3| + 6 \quad \boxed{24}$$

25 خالى بېسوود ئابورينا سان دەلېن قازانجى دەزگايەك گەشتۆتە خالى بېسوود كاتېك تېچوونى بېرەمەھپەنەن و دەستكەوتى فروشتەن يەكسانېن. خالى بېسوود بۇ دەزگايەك بدۆزەوگە نەخشەى تېچوونى بكا تە $C = 5\sqrt{x}$ و نەخشەى دەستكەوتى بكا تە $R = 3x$.

دەربارەى چەمكەكان

26 ھاوکیڭشەى نەخشەىەك بنووسە، يەكترېرېنە ئاسۆیپەكانى. $x = -2$, $x = 4$, $x = 6$ بېت.

27 خالەكانى ھەر خشتەىەك شىكارى ھاوکیڭشەىەكن لەم چوار ھاوکیڭشەنە:

$$xy = k \quad \text{د} \quad y = kx^2 \quad \text{ج} \quad y = x^2 + k \quad \text{ب} \quad y = kx + 5 \quad \text{ا}$$

خشتەى ھەر ھاوکیڭشەىەك ديارىكە، و بەھای k ديارىكە. رېگای كاركرنت پروونكەوہ.

x	1	4	9
y	7	13	23

x	1	4	9
y	3	24	81

*

x	1	4	9
y	-9	6	71

x	1	4	9
y	36	9	4

راست يان ھەلە؟ لە پرسىارى 28 تا 31، ديارىكە ئەگەر رستەكە راستە ھۆيەكەى لىكبدەوہ، يان ئەگەر ھەلەيە بە دژە نمونەىەك بيسەلمېنە.

28 ئەگەر خالى $(-2, 1)$ بکەوېتە سەر پروونكرندنەوہيەك ھاوچېبېت لەگەل خالى بنەرەت ئەوا خالى $(-2, -1)$ دەكەوېتە سەر ھەمان پروونكرندنەوہكە.

29 ئەگەر خالى $(-2, 1)$ بکەوېتە سەر پروونكرندنەوہيەك ھاوچېبېت لەگەل تەوہرى y ئەوا خالى $(-2, -1)$ دەكەوېتە سەر ھەمان پروونكرندنەوہكە.

30 ئەگەر $b^2 - 4ac > 0$ و $a \neq 0$ ئەوا پروونكرندنەوہى نەخشەى $f(x) = ax^2 + bx + c$ دوو يەكترېرېنى ئاسۆیى جياوازى ھەيە.

31 ئەگەر $b^2 - 4ac = 0$ و $a \neq 0$ ئەوا پروونكرندنەوہى نەخشەى $f(x) = ax^2 + bx + c$ يەك يەكترېرېنى ئاسۆیى ھەيە.

32 ھاوکیڭشەى ئەو پروونكرندنەوہ بدۆزەوہ كە پىكدېت لەھەموو ئەو خالانەى پرووتەختى پۆوتانى (x, y) كە دوورېيەكەى لە خالى بنەرەت دەكاتە دوو ئەوہندەى دوورېيەكەى لە خالى $(0, 3)$.

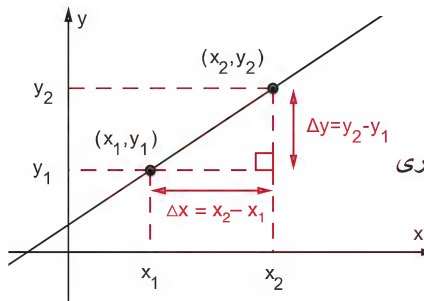
نمونه هیلیه کان و تیگری گورانیه کان

Linear Models and Rates of change

2-1

نامانجه کان

لاری راسته هیلی



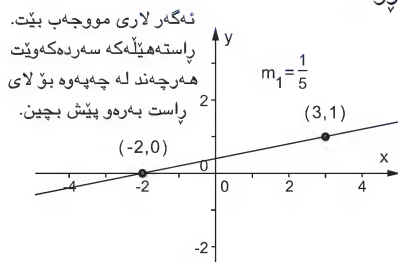
کاتیگ خالیگ له سهر راسته هیلیکی نائه ستوون دهجوولیت، به مهوادی ئاسویی یه که له چهپهوه بۆ راست، خاله که به سهر دهکویت یان دیته خواروه به پیی باری راسته هیلیه که لاری راسته هیلیه که بریتییه له ژماره ی ئو یه کانه ی که خاله که به سهری دهکویت « یان دایده به زینیت » له نهجامی ئهم جوولانه وهیه دا. خاله کانی (x_1, y_1) و (x_2, y_2) سهر راسته هیلیه که به کار بهینه.

ههرچهنده خاله که له سهر راسته هیلیه که له چهپهوه بۆ لاری راست به مهوادی ئاسویی $\Delta x = x_2 - x_1$ یه که، خاله که به مهوادی ستوونی $\Delta y = y_2 - y_1$ یه که دهجوولیت، Δ به دلتا بخوینه وه، که پیتیکی یوانیه، ههر دوو نووسینی Δx و Δy له دوو پیت پیکهاتوون به لام ههر دووکیان یه که هیمان.

پیناسه ی لاری راسته هیلی

لاری راسته هیلیکی نائه ستوون که به دوو خالی (x_1, y_1) ، (x_2, y_2) داده پوات بریتییه له $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ که $x_2 \neq x_1$ لاری راسته هیلی ئه ستوون پیناسه نهکراوه.

سهرنجبه ئه راسته هیلی به دوو خالی (x_1, y_1) ، (x_2, y_2) داده پوات

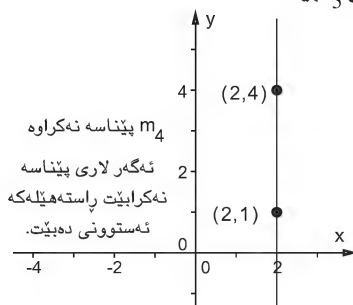


ئه گهر لاری مووجهب بیئت. راسته هیلیه که سهردهکویت ههرچهنده له چهپهوه بۆ لاری راست به رهرو پیش بچین.

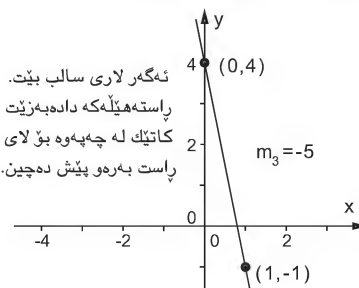
$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-(y_2 - y_1)}{-(x_2 - x_1)} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$$

ههریویه هه لباردنی خالی یه که م و خالی دووم کار له نهجامه که ی ناکات.

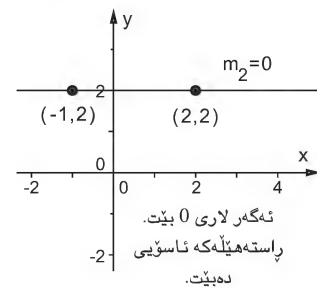
له شیوه کانی خواروه 4 راسته هیلی دهردهکویت. یه که میان لارییه که ی مووجهبه، و دووه میان لارییه که ی دهکات 0 و سییه میان لارییه که ی سالبه، و ئه وی تریان لارییه که ی پیناسه نهکراوه، به شیوه یه کی گشتی، ههرچهنده به های پروتی لارییه که ی زیادبکات به رزبوونه وه که ی زیاد دهکات. به رزبوونه وه ی ئه راسته هیلیه که لارییه که ی -5 بیئت له شیوه ی خواروه که وره تره له به رزبوونه وه ی ئه راسته هیلیه که لارییه که ی 1/5 بیئت.



پیناسه نهکراوه m_4 ئه گهر لاری پیناسه نهکراویت راسته هیلیه که ئه ستوونی ده بیئت.



ئه گهر لاری سالب بیئت. راسته هیلیه که داده بیئت کاتیگ له چهپهوه بۆ لاری راست به رهرو پیش دهچین.



ئه گهر لاری 0 بیئت. راسته هیلیه که ئاسویی ده بیئت.

- به زانیی دوو خال له سهر راسته هیلیگ لارییه که ی دهجوولیت وه.
- هاوکیشه ی راسته هیلیگ دهجوولیت وه به زانیی لاری و خالیگ سهر راسته هیلیه که.
- لاری، وه که ریژه یان وه که تیگری گوران، له پرسیاره کانی ژبانی پۆژانه لیکنه داده وه.
- ویینه ی راسته هیلیگ دهکیشیت هاوکیشه که ی به شیوه ی لاری-یه کتر برین نووسرابیئت.
- هاوکیشه ی راسته هیلیگ دهنووسیت تهریب بیئت به راسته هیلیکی دیاریکراو یان ئه ستوون بیئت له گه لی.

زاراوه کان Vocabulary

لاری Slope

شیوه ی لاری - خال Slope - point form

شیوه ی لاری - یه کتر برین Slope - Intercept form

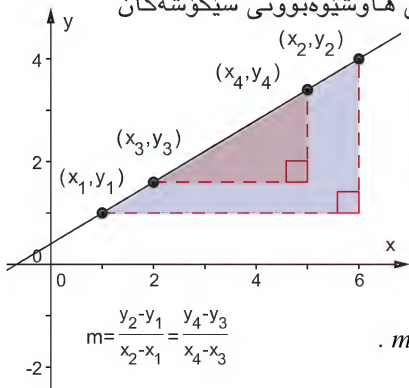
شیوه ی گشتی General form

تیگری ناوهندی گوران

Average rate of change

هاوكيشه‌ی راسته‌هیل

ده‌توانریت هه‌ردوو خال له خاله‌كانی راسته‌هیلێكى نائەستوون بۆ دۆزینه‌وه‌ی لاری راسته‌هیلێكه به‌كاربهێنریت. ده‌توانیت پاسه‌دانى ئەم كاره‌ بكه‌یت به‌ به‌كارهێنانى هاوشیوه‌بوونی سیگۆشه‌كان هه‌روه‌ك له شیوه‌ی به‌رامبه‌ر پرونكراوته‌وه‌.



$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_4 - y_3}{x_4 - x_3}$$

ده‌توانیت هاوكيشه‌ی راسته‌هیلێك بنوسیت ئەگه‌ر لاری و پۆتانی خالێكى سه‌ر راسته‌هیلێكه‌ بزانی. وا دابنێ لاری راسته‌هیلێكه‌ ده‌كات m ، و به‌ خالێ (x_1, y_1) داده‌پوات. ئەگه‌ر (x, y) خالێكى جوولایو بێت له‌ سه‌ر راسته‌هیلێكه‌، ئەوا $m = \frac{y - y_1}{x - x_1}$.

ده‌توانیت ئەو هاوكيشه‌یه به‌ شیوه‌ی $y - y_1 = m(x - x_1)$ بنوسیت، نووسینی هاوكيشه‌ی راسته‌هیلێكه به‌م شیوه‌یه پێی ده‌وتریت شیوه‌ی لاری - خال.

هاوكيشه‌ به‌شیوه‌ی لاری - خال

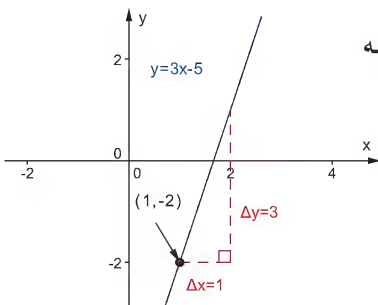
شیوه‌ی هاوكيشه‌ی ئەو راسته‌هیلێكه‌ لارییه‌كه‌ی m و به‌خالێ (x_1, y_1) داده‌پوات بریتیه‌له‌:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

دۆزینه‌وه‌ی هاوكيشه‌ی راسته‌هیل

هاوكيشه‌ی ئەو راسته‌هیلێكه‌ بدۆژه‌وه‌كه‌ لارییه‌كه‌ی 3 ه و به‌ خالێ $(1, -2)$ داده‌پوات.

شیكار



$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - (-2) = 3(x - 1)$$

$$y + 2 = 3(x - 1)$$

$$y = 3x - 5$$

له‌بیرت بێت تهنه‌ا راسته‌هیلێكه‌ نائەستوونه‌كان لارییان هه‌یه‌. له‌مه‌شه‌وه‌، ناتوانریت هاوكيشه‌ی راسته‌هیلێكه‌ نائەستوون به‌ شیوه‌ی لاری - خال بنوسریت. هاوكيشه‌ی راسته‌هیلێكه‌ نائەستوون به‌ شیوه‌ی $x = k$ ده‌نووسریت كه‌ ژماره‌یه‌كى راستیه‌، بۆ نمونه‌ هاوكيشه‌ی ئەو راسته‌هیلێكه‌ نائەستوونه‌ی كه‌ به‌ خالێ $(1, -2)$ داده‌پوات، بریتیه‌ له‌ $x = 1$.

1. هاوكيشه‌ی راسته‌هیلێكه‌ بدۆژه‌وه‌ لارییه‌كه‌ی -2 بێت و به‌خالێ $(1, 1)$ داده‌پوات.



پێژه و تێكپرای گۆرانه‌كان

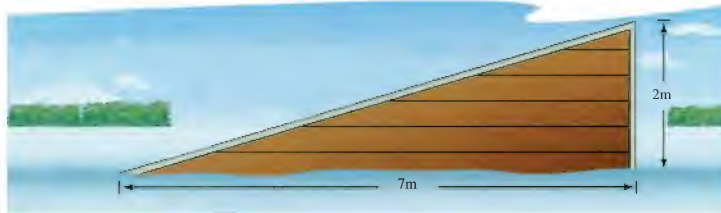
ده‌توانریت لاری راسته‌هیلێكه‌ و هه‌ك پێژه یان تێكپرا لێكبه‌درێته‌وه‌. ئەگه‌ر x و y به‌همان یه‌كه‌ی پێوانه‌ پێورابیت، هه‌ر بۆیه‌ لاری یه‌كه‌ی پێوانه‌ی نابیت. ئەوه‌شيان ده‌بێته‌ پێژه، به‌لام ئەگه‌ر x و y به‌دوو یه‌كه‌ی پێوانه‌ی جیاواز پێورا بن ئەوا لاری ده‌كات تێكپرای گۆران. له‌م پۆله‌دا باره‌كانی لاری ده‌بێته‌ پێژه، باری تر ده‌بێته‌ تێكپرای گۆران ده‌خوینیت.

ا سالى 1990 ژمارەى دانىشتوانى شارىك 3687000 كەس بوو، و لە سالى 2000 ، 4042000 كەس بوو. تىكپاي ناۋەندى گۇرپانى ژمارەى دانىشتوانى چەندبوو.

$$\begin{aligned} \text{گۇرپان لە ژمارەى دانىشتوان} &= \frac{\text{گۇرپان لە ژمارەى سال}}{\text{گۇرپان لە ژمارەى سال}} \\ &= \frac{4042000 - 3687000}{2000 - 1990} = 35500 \end{aligned}$$

كەۋاتە تىكپاي ناۋەندى گۇرپانى ژمارەى دانىشتوانى لە سالىكدا 35500 كەسە. ئەگەر ژمارەى دانىشتوانى ئەو شارە بە ھەمان پىژە زىاد بكت. ژمارەى دانىشتوانى لە سالى 2010 دەپتە 4397000 كەس. سەرنج بدە لارى لىرەدا تىكپاي گۇرپانە.

ب لە گۇرپانى ھەلخلىسكانى سەر ئاو، يانەيەك سەكۆى بۇ خۆھەلدانى يارىزانەكان دانا. كە بەرزىيەكەى دوو مەتر و درىژىيەكەى 7 مەتر بوو ھەرۈك لە وىنەى خوارەۋە دەردەكەۋىت، لارى سەكۆيەكە بدۆزەۋە.



لارى سەكۆيەكە برىتييە لە پىژەى بەرزىيەكەى بۇ درىژىيەكەى $m = \frac{2m}{7m} = \frac{2}{7}$.

تېبىنى بكتە لارى لىرەدا برىتييە لە پىژە، يەكەى پىۋانەيى نىيە.

ئەو تىكپا گۇرپانەى كە لەبەشى (أ)ى نمونە 2 دۆزىتەۋە برىتييە لە تىكپاي ناۋەندى گۇرپان. تىكپاي ناۋەندى گۇرپان ھەردەم بە مەۋداى ماۋەكە ھەژماردەكرىت. لە نمونەى 2 ئەو ماۋەيە دەكاتە [1990, 2000]، لەبەشى سىيەم جورىكى تر لە تىكپاي گۇرپانەكان فىردەبىت ئەۋىش تىكپاي ساتى گۇرپانەكانە.

2. پىاۋىك سەيرى فرۇكەيەك لە ناسماندا دەكات، كە 600 m ناسۋىيى لىيەۋە دوورە، بە بەرزە گۆشەى 60°، لارى راستەھىللى نىۋان چاۋى پىاۋەكە و فرۇكەكە چەندە؟ نايە ئەو لارىيە پىژەيە يان تىكپاي گۇرپانە؟ بەرزى فرۇكەكە چەندە؟



نۋاندنى نمونە ھىللىيەكان بە پرونكرنەۋەدى

دەكرىت زۆربەى پرسىيارەكانى ئەندازەى شىكرنەۋە بۇ دوو جور پۇللىن بكرىت: يەكەميان بۇ دۆزىنەۋەى ھاۋكىشەى ھىللى (چەماۋە بىت يان نا) پرونكرنەۋەى دراۋەكە. و دوۋەميان بۇ كىشەنى پرونكرنەۋەى ھاۋكىشە دراۋەكە. دەتوانىت شىۋەى لارى - خال بۇ ھاۋكىشەى راستەھىللىكە بەكاربەللىت بۇ شىكارى پرسىيارەكانى جورى يەكەم. بەلام ئەم شىۋەيە بۇ جورى دوۋەم ناگونجىت. شىۋەيەكى ترى ھاۋكىشەى راستەھىللى ھەيە لەگەل شىكارى پرسىيارەكانى جورى دوۋەم دىگونجىت، كە شىۋەى لارى - يەكتىرپىنە.

ھاۋكىشەى راستەھىللى بە شىۋەى لارى - يەكتىرپىن

پرونكرنەۋەى نەخشەى ھىللى

$$y = mx + b$$

راستەھىللىكە لارىيەكەى m و يەكتىرپىنە ستونىيەكەى برىتييە لە (0, b).

نمونه 3

کیشانی راسته‌هیلکان

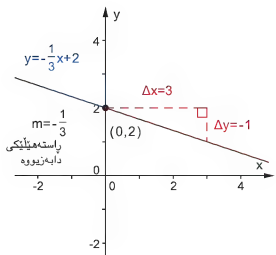
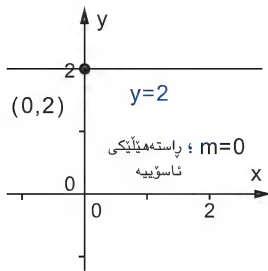
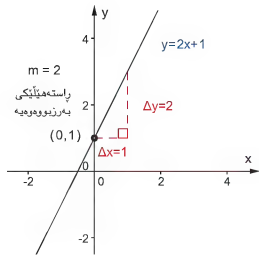
پوونکردنه‌وهی هر هاوکیشیه‌ک بکیشه.

ا $y = 2x + 1$

ب $y = 2$

ج $3y + x - 6 = 0$

شیکار



ا یه‌کتربرینی ستوونی ده‌کاته $(0, 1)$ چونکه $b = 1$. لاری راسته‌هیلکه ده‌کاته 2. ئه‌وش مانای ئه‌ویه ئه‌گه‌ر یه‌که ئاسویی به‌ره‌و پیش بجیت له چه‌په‌وه بۆ راست به‌ده‌ستپیکردن له خالی $(0, 1)$ پئویسته دوو یه‌که به‌رزیتیه‌وه، ئه‌مه‌ش مانای وایه خالی $(1, 3)$ ده‌که‌وئته سهر راسته‌هیلکه. هه‌ردوو خالی $(0, 1)$ و $(1, 3)$ دیاریبکه و ئه‌و راسته‌هیلکه بکیشه که به‌و دوو خاله‌دا ده‌پوات.

ب یه‌کتربرینی ستوونی ده‌کاته $(0, 2)$ چونکه $b = 2$. لاری راسته‌هیلکه بریتییه له 0. ئه‌وش ئه‌وه ده‌گه‌یه‌نیت که راسته‌هیلکه ئاسویییه. ته‌نها راسته‌هیلکه‌کی ته‌ریب به‌ته‌وه‌ری x بکیشه که به‌ خالی $(0, 2)$ داده‌پوات.

ج هاوکیشه‌که به‌ شیوه‌ی لاری - یه‌کتربرین بنوسه.

$$3y + x - 6 = 0$$

$$3y = -x + 6$$

$$y = -\frac{1}{3}x + 2$$

یه‌کتربرینی ستوونی بریتییه له $(0, 2)$ چونکه $b = 2$. لاری راسته‌هیلکه بریتییه له $-\frac{1}{3}$. ئه‌وش ئه‌وه ده‌گه‌یه‌نیت ئه‌گه‌ر 3 یه‌که له خالی $(0, 2)$ له چه‌په‌وه بۆ لای راست به‌ره‌و پیش بجیت، پئویسته یه‌که یه‌که دابه‌زیت: ئه‌مه‌ش مانای وایه خالی $(3, 1)$ ده‌که‌وئته سهر راسته‌هیلکه. هه‌ردوو خالی $(0, 2)$ و $(3, 1)$ دیاریبکه و ئه‌و راسته‌هیلکه بکیشه که به‌و دوو خاله‌دا ده‌پوات.

3. وینه‌ی پوونکردنه‌وهی هر هاوکیشیه‌ک بکیشه.



ا $y + 3x - 2 = 0$

ب $y = -2$

ج $y = 3x - 1$

له‌به‌رئه‌وه‌ی لاری راسته‌هیلکی ئه‌ستوون پیناسه نه‌کراوه، بۆیه ناتوانیت هاوکیشه‌که‌ی به‌شیوه‌ی لاری - خال و شیوه‌ی لاری - یه‌کتربرین بنوسریت. شیوه‌ی گشتی هاوکیشه‌ی راسته‌هیلکه که بۆ هه‌موو باره‌کان ده‌گونجیت. به‌م شیوه‌یه:

$$Ax + By + C = 0$$

نابیت هه‌ردوو ژماره‌ی A و B له‌همان کاتدا بکاته 0 و اتا که $|A| + |B| \neq 0$. کاتیک $x = k$ هاوکیشه‌ی راسته‌هیلکی ستوونیه، ده‌توانیت به‌شیوه‌ی گشتی $(1)x + (0)y + (-k) = 0$ ببنوسیت.

شیوه جیاوازه‌کانی هاوکیشهی راسته‌هیل

1. شیوهی گشتی $Ax + By + C = 0$ کاتیک $|A| + |B| \neq 0$.

2. شیوهی هاوکیشهی راسته‌هیلی ستوونی $x = k$

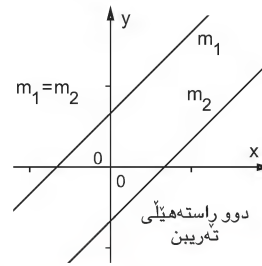
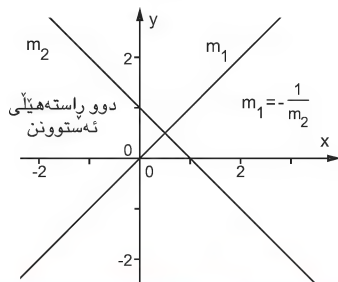
3. شیوهی هاوکیشهی راسته‌هیلی ئاسویی $y = k$

4. شیوهی لاری - خال $y - y_1 = m(x - x_1)$

5. شیوهی لاری - یه‌کترپرین $y = mx + b$

ته‌ریب‌وون و ئه‌ستوونبوونی راسته‌هیل‌ه‌کان

لاری راسته‌هیل پۆلکی گرنکی هیه له دیاریکردنی ته‌ریب‌وون یان ئه‌ستوونبوونی راسته‌هیل‌ه‌کان بیئه‌وهی پۆیستت به کیشانی وینه‌کانیان بیت. ئه‌گهر لاری دوو راسته‌هیلی ئه‌ستوون یه‌کسان بن ئه‌وا ته‌ریب ده‌بن و ئه‌گهر ئه‌نجامی لیكدانی لاریه‌کانیان بکاته -1، ئه‌وا ئه‌ستوون ده‌بن.



له‌بیرت بیت

له‌بیرت بیت

راسته‌هیلی ئه‌ستوونی
ئو راسته‌هیل‌ه‌یه که
ته‌ریب به‌ته‌وه‌ری y ده‌بیت
راسته‌هیلی ئاسویی
ئوه‌یه که به‌ته‌وه‌ری x
ته‌ریب ده‌بیت.

ته‌ریب‌وون و ئه‌ستوونبوونی راسته‌هیل‌ه‌کان

1. دوو راسته‌هیل ته‌ریب ده‌بن، ئه‌گهر ته‌نها ئه‌گهر لاریه‌کانیان یه‌کسان بن.

2. دوو راسته‌هیل ئه‌ستوون ده‌بن، ئه‌گهر و ته‌نها ئه‌گهر ئه‌نجامی لیكدانی لاریه‌کانیان بکاته -1.

دۆزینه‌وهی راسته‌هیل‌ه‌ ته‌ریبه‌کان و ئه‌ستوونه‌کان

ا به‌شیوهی گشتی، هاوکیشهی ئه‌و راسته‌هیل‌ه‌ بنوسه، که به‌ خالی (2, -1) داده‌پوات و ته‌ریبه به راسته‌هیلی $2x - 3y = 5$.

ب به‌ شیوهی گشتی، هاوکیشهی ئه‌و راسته‌هیل‌ه‌ بنوسه که به‌ خالی (2, -1) داده‌پوات و ئه‌ستوونه له‌گه‌ل راسته‌هیلی $2x - 3y = 5$.

شیکار

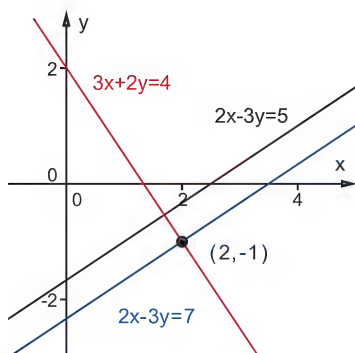
لاری راسته‌هیلی $2x - 3y = 5$ بدۆزه‌وه، هاوکیشه‌که به‌ شیوهی لاری - یه‌کترپرین بنوسه

$$y = \frac{2}{3}x - \frac{5}{3}$$

لاری راسته‌هیل‌ه‌که بریتییه له $\frac{2}{3}$.

4 نمونه

ا لاری ئهو راستههیلله به خالی $(2, -1)$ دادهپوات و تهريبه به راستههیلله $2x - 3y = 5$ بریتیه له $\frac{2}{3}$. هاوکیشهی ئهو راستههیلله بدۆزهوه که لاریبهکهی $\frac{2}{3}$ و به خالی $(2, -1)$ دادهپوات.



$$\begin{aligned} y - y_1 &= m(x - x_1) \\ y - (-1) &= \frac{2}{3}(x - (2)) \\ 3(y + 1) &= 2(x - 2) \\ 2x - 3y - 7 &= 0 \end{aligned}$$

ب لاری ئهو راستههیلله که به خالی $(2, -1)$ دادهپوات و ئهستونه لهگهل راستههیلله $2x - 3y = 5$ بریتیه له $m = -\frac{3}{2}$. هاوکیشهی ئهو راستههیلله بدۆزهوه که لاریبهکهی $-\frac{3}{2}$ و به خالی $(2, -1)$ دادهپوات.

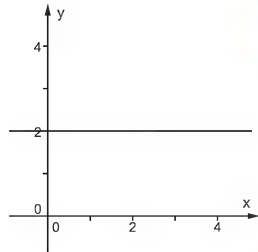
$$\begin{aligned} y - y_1 &= m(x - x_1) \\ y - (-1) &= -\frac{3}{2}(x - (2)) \\ 2(y + 1) &= -3(x - 2) \\ 3x + 2y - 4 &= 0 \end{aligned}$$

4. **ا** به شیوهی گشتی، هاوکیشهی ئهو راستههیلله بدۆزهوه که به خالی $(1, -3)$ دادهپوات و تهريبه به راستههیلله $x + 5y = -1$.

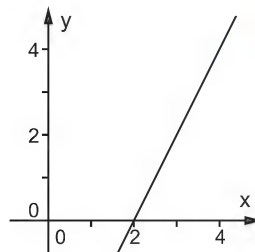


ب به شیوهی گشتی، هاوکیشهی ئهو راستههیلله بدۆزهوه که به خالی $(2, -1)$ دادهپوات و ئهستونه لهگهل راستههیلله $x + 5y = -1$.

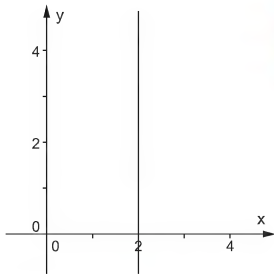
له پرسپاری 1 تا 4 ، لاری راسته‌هیلکه بکه‌ملینه.



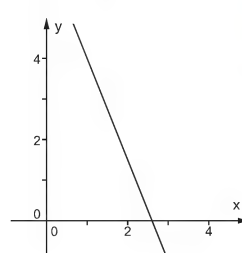
2



1



4



3

له پرسپاری 5 تا 10 ، نهو راسته‌هیلکه بکیشه که لاریه‌که‌ی دراوه و به خاله دراوه‌که دا ده‌پوات.

(2, 3) : -2 **7**

(-4, 1) : -3 **6**

(2, 3) : 1 **5**

(-4, 1) : پیناسه‌نه‌کراوه **10**

(2, 3) : $-\frac{3}{2}$ **9**

(-4, 1) : 0 **8**

له پرسپاری 11 تا 14 ، لاری راسته‌هیلکه بدۆزه‌که به دوو خاله دیاریکراوه‌که دا ده‌پوات.

(4, -2) و (3, -2) **12**

(5, 2) و (3, -4) **11**

(2, 5) و (2, 1) **14**

$(-\frac{3}{4}, \frac{1}{6})$ و $(-\frac{1}{2}, \frac{2}{3})$ **13**

له پرسپاری 15 تا 18 ، سی خالی تر له‌سه‌ر نهو راسته‌هیلکه دیاریکه که لاریه‌که‌ی و خالیکی سه‌ر راسته‌هیلکه دراوه.

(1, 7) : $m = -3$ **16**

(2, 1) : $m = 0$ **15**

(-2, -2) : $m = 2$ **18**

m پیناسه‌نه‌کراوه : (-3, 4) **17**

له پرسپاری 19 تا 22 ، لاری راسته‌هیلکه و خالی به‌کتریرینه ستونیه‌که‌ی بدۆزه‌که.

$6x - 5y = 15$ **20**

$x + 5y = 20$ **19**

$y = -1$ **22**

$x = 4$ **21**

له پرسپاری 23 تا 28 هاوکیشه‌ی نهو راسته‌هیلکه بدۆزه‌که لاریه‌که‌ی و خالیکی سه‌ر راسته‌هیلکه دراوه، له پاشاندا وینه‌که‌ی بکیشه.

(0, 4) : $m = 0$ **25**

(3, -2) : $m = 3$ **24**

(0, 3) : $m = \frac{3}{4}$ **23**

(-1, 2) : پیناسه‌نه‌کراوه **28**

(0, 0) : $m = \frac{2}{3}$ **27**

(-2, 4) : $m = -\frac{3}{5}$ **26**

له پرسپاری 29 تا 34 ، هاوکیښه یی ئه و راسته هیله بنووسه که به هردوو خاله که دیارکراون.

29 (2, 1) و (0, 3) 30 (-3, -4) و (1, 4) 31 (0, 3/4) و (1/2, 7/2)

32 (7/8, 3/4) و (5/4, -1/4) 33 (5, 1) و (5, 8) 34 (1, -2) و (3, -2)

35 هاوکیښه یی ئه و راسته هیله ستونیه بدوژه وه که یه کتربرینی ئاسویی له 3 دا هیه.

36 هاوکیښه یی ئه و راسته هیله ئاسویی بدوژه وه که یه کتربرینی ستونی له 3 دا هیه.

37 پرونیبکه وه که هاوکیښه یی $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ ، کاتی که $a \neq 0$ و $b \neq 0$ دهکاته هاوکیښه یی ئه و راسته هیله یی که دوو خالی یه کتربرینی $(a, 0)$ و $(0, b)$ هیه.

له پرسپاری 38 و 39 دا، ئه نجامی راهینانی پیشوو به کاربهینه تا هاوکیښه یی ئه و راسته هیله بدوژته وه که دوو یه کتربرینه دیارکراو ده که یی هیه.

38 (2, 0) و (0, 3) 39 (0, -2) و (-2/3, 0)

له پرسپاری 40 تا 43 ، هاوکیښه یی که بنووسه بو ئه و راسته هیله یی به خاله دراو ده که دا ده پوات و ته ریه به راسته هیله دراو ده که بنووسه.

40 (2, 1) ؛ $4x - 2y = 3$ 41 (3/4, 7/8) ؛ $5x - 3y = 0$

42 (-6, 4) ؛ $3x + 4y = 7$ 43 (-1, 0) ؛ $y = -3$

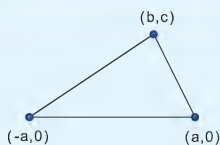
له پرسپاری 44 تا 47 ، هاوکیښه یی که بنووسه بو ئه و راسته هیله یی به خاله دراو ده که دا ده پوات و ئه ستوونه له گه ل راسته هیله دراو ده که بنووسه.

44 (2, 1) ؛ $4x - 2y = 3$ 45 (3/4, 7/8) ؛ $5x - 3y = 0$

46 (-6, 4) ؛ $3x + 4y = 7$ 47 (-1, 0) ؛ $y = -3$

48 ئایا خاله کانی $(-2, 1)$ و $(-1, 0)$ و $(2, -2)$ دهکونه سه ریه که راسته هیله یی؟

دهرباره یی چه مکه کان



له راهینانی 49 تا 51 ، پووتانی خاله یه کتربرینه دیارکراو ده که بدوژه وه. پرونیبکه وه چو ن شیکاره که ت ئه نجامدا.

49 خالی یه کتربرینی ته و ره کانی لایه کانی سیگوشه که.

50 خالی یه کتربرینی نا و نه ده کانی سیگوشه که.

51 خالی یه کتربرینی به رزییه کانی سیگوشه که.

52 گوپینی پله کانی گه رما ئاو له پله یی گه رمی 100° دهکولیت به پیوهری سه دی (212°) به پیوهری

فه رنه ایت، و له پله یی گه رمی 0° ده بیه ستیت (32°) به پیوهری فه رنه ایت. هاوکیښه یی که هیلی

بنووسه بو گوپینی پیوهری سه دی بو پیوهری فه رنه ایت، و هاوکیښه یی که تر بو گوپین به

پیچه وانه یی ئه و ئا راسته یی. 72° به پیوهری فه رنه ایت بو پله یی گه رمی به پیوهری سه دی بگوړه.

53 كۆمپانىيەك پۇژانە 15 000 دىنار دەداتە شوفىرى بارهەلگىك لى بىرى خوارىن و پشودان، و 350 دىنار لى بىرى ھەر كىلۇمەترىك كە دەپىرىت. نەخشەيەك بنووسە نموونەيەك پىك بھىنىت بۇ ھەژماركىردى بىرى ئەو پارەيەي كۆمپانىيەك بە شوفىرەكەى دەدات بەپىنى ژمارەى ئەو كىلۇمەترانەى كە دەپىرىت. شوفىرەكە 137km بىرى. كۆمپانىيەك چەند پارەى پى دەدات؟

54 بەكاربردنى ھىلى كاتىك ئۆتۆمبىلىك دىكرىت نىرخەكەى سال دواى سال دادەبەزىت. واتە ئۆتۆمبىلەكە سال لى دواى سال بەكاردەبىرىت. ھەندىك لى شارەزايانى بەپىوەبىردىن پىشت بە پىسايەك دەبەستىن بۇ ھەژماركىردى بەكاربراوەكان. بەپىنى ئەم پىسايە وادەدەكەوئىت كە نىرخى بەكاربراو لى سالىكەو بۇ سالىكى تر نەگۆرە. يەك لى كۆمپانىيەكان ئامىرىكى كرى. نىرخەكەى 875 000 دىناربوو. ئەم ئامىرە پاش 5 سال بۇ بەكارھىنانان ناشىت و ھىچ نىرخىك ناكات. \square نەخشەيەكى ھىلى بنووسە نموونەيەك پىكبھىنىت بۇ ھەژماركىردى نىرخى ئامىرەكە بە پىنى كات t ($0 \leq t \leq 5$).

\square نىرخى ئەم ئامىرە چەندە كاتىك $t = 2$.

\square پاش چەند كات نىرخى ئامىرەكە دەپىتە 175 000 دىنار؟

دوورى خالى (x_1, y_1) لى راستەھىلى $Ax + By + C = 0$ بەياساى $d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$ دەپىوئىت، لى پرسىارى 55 تا 58، دوورى خالەكە لى راستەھىلەكە بدۆزەو.

55 $4x + 3y = 10$ ؛ $(0, 0)$

56 $x - y - 2 = 0$ ؛ $(-2, 1)$

57 $x = -1$ ؛ $(6, 2)$

58 $4x + 3y = 10$ ؛ $(2, 3)$

59 بەپىنى m ، دوورى d لى نىوان خالى $(3, 1)$ و راستەھىلى $y = mx + 4$ بدۆزەو، كەى ئەم دوورىيە دەكاتە 0 ؟ وەلامەكە بە ئەندازەيى پرونىكەو؟

60 بىسەلمىنەكە شىووى ئەندازەيى لىئەنجامى بەيەك گەياندى ناوەرەستى يەك لىدواى يەكى لايەكانى چوارلايەك پەيدادەبىت برىتتىيە لى لاتەرىب.

61 بىسەلمىنەكە تىرەكانى مەعىن لىسەر يەكتەر ئەستوون

راست يان ھەلە؟ لى پرسىارى 62 و 63 دا، دىارىكە، ئەگەر پىستەكە راستە ھۆيەكەى لىكبدەو يان ئەگەر ھەلەيە بە دژە نموونەيەك بىسەلمىنە.

62 دوو راستەھىلى $ax + by = c_1$ و $bx - ay = c_2$ ، لىگەل يەك ئەستوون، كاتىك $a \neq 0$ و $b \neq 0$.

63 دىكرىت دوو راستەھىل لارىيەكانىان مۇجەب بىت ئەستوون بن.

تاقیکردنەوی نیوەی بەش

1-1 پوونکردنەوی نەخشەکان

1 بە خالەکان پوونکردنەوی هەر نەخشەیەک بکێشە.

$$f(x) = 2x^2 - 4x \quad \text{a}$$

$$f(x) = 2\sqrt{x+1} - 1 \quad \text{b}$$

2 خالەکانی یەکتەرپرینی پوونکردنەوی هەرنەخشەیەک لەگەڵ دوو تەویری پۆتانەکان بدۆزەو، لە پاشاندا لە هاوچۆنی لەگەڵ تەویری y و لەگەڵ خالی بنەرەت بکۆڵەو.

$$f(x) = \frac{x}{|x|+1} \quad \text{a}$$

$$f(x) = (3x-1)^2 + 6x \quad \text{b}$$

$$f(x) = x^3 + 3x \quad \text{و} \quad g(x) = x^2 + 3 \quad \text{3}$$

a دیاریبکە نەخشەی f تاکە و نەخشەی g جووتە.

b خالەکانی یەکتەرپرینی پوونکردنەوی دوو نەخشە بکۆڵەو.

2-1 هاوکیشەیی راستەهێڵ

4 هاوکیشەیی ئەو راستەهێڵە بدۆزەو کە لاریبەکەیی دەکاتە -2 و بە خالی $(-1, 2)$ دا دەپوات.

5 هاوکیشەیی ئەو راستەهێڵە بدۆزەو کە بە دوو خالی $(0, 1)$ و $(\frac{1}{5}, 0)$ دا دەپوات.

6 خالی یەکتەرپرینی دوو راستەهێڵی پرسیارەکانی 4 و 5 بدۆزەو.

7 هاوکیشەیی ئەو راستەهێڵە بدۆزەو کە بە دوو خالی $(2, 0)$ و $(0, b)$ دا دەپوات. بەهای b چەندە کە وا دەکات راستەهێڵەکە ئەستوونبێت لەگەڵ راستەهێڵی $x - 2y + 1 = 0$.

8 بەهای a چەندە کە وادەکات خالەکانی $(2, 0)$ و $(0, -3)$ و $(a, 1)$ بکەونە سەریەک راستەهێڵ؟

نەخشەكان و پوونكردنەوكانيان

Functions and Their Graphs

ئامانجەكان

نەخشەكان و نووسىنى نەخشەيى

دەتوانىت پەيوەندى لە كۆمەلەى A بۆ كۆمەلەى B بە جووتە پىكراوەكانى (x, y) دەرېرپىن كاتىك $x \in A$ و $y \in B$ دەتوانىن بىلەين پەيوەندىيەكە y بە x دەبەستىتەو. (\in دەرېرپىن تەو دەنەيە لە). نەخشە برىتییە لە پەيوەندىيەكە لە كۆمەلەى A بۆ كۆمەلەى B ، سىفەتى بنەرەتى تايبەتى ھەيە كە دوو دانەى x, y لە B دا يەكسان دەبن ئەگەر بەھۆى نەخشەكە بەھەمان دانەى x لە A بەسترابنەو. بە واتايەكى تر ئەگەر (x, y) و (x, z) جووتە پىكراوێك بێت لە كۆمەلەى ئەو جووتە پىكراوانەى نەخشەكە پىكدەھىن، ئەوا دەبێت $y = z$. لەم پەيوەندىيە بە x دەوترىت گۆراوى نازاد و بە y دەوترىت گۆراوى پەيوەست.

دەتوانىن زۆر لە بارەكانى ژيانى پۆزانە بە نەخشەكان بنوینين. پووبەرى بازەنى A نەخشەيە پەيى نيوتيرە r لە پەيوەندى $A = \pi r^2$. لەم پەيوەندىيەدا r گۆراوى نازادە و A گۆراوى پەيوەستە

- نووسىنى نەخشەيى بۆ نواندى نەخشە و ھەژمارکردنى بەھايەكانى بەکار دەھيێت.
- بوارو مەوداى نەخشە دياريدەكات.
- پوونكردنەوى نەخشە دەكيشيێت.
- جۆرە جياوازەكانى جيگۆرپكى نەخشەكان جيا دەكاتەو.
- نەخشەكان پۆلێندەكات و پىكەتەكەى جيا دەكاتەو.

پىناسەى نەخشەى راستى بە گۆراوى راستى

ئەگەر A و B دوو كۆمەلە بن لە ژمارە راستىيەكان، ئەوا ھەر نەخشەيەكى f لە A بۆ B برىتییە لە نەخشەيەكى راستى بە گۆراوێكى راستى. بوارى f دەكاتە كۆمەلەى A . ئەگەر نەخشەى f دانەى y لە B بە دانەى x لە A بەستىتەو، ئەوا دەكاتە بەھايى f لە x ، لەوكاتەدا دەنووسرێت $y = f(x)$ و دەلێين y برىتییە لە وێنەى x بە نەخشەى y ، مەوداى نەخشەى f برىتییە لە كۆمەلەى دانەكانى B كە نەخشەكە بە ھەموو دانەكانى بوار A دەبەستىتەو.

Vocabulary زاراوەكان

Relation	پەيوەندى
Associate	دەبەستىتەو
نەخشەى راستى بەيەك گۆراوى	
Real function in one real variable	راستى
Domain	بوار
Range	مەودا
نووسىنى نەخشەيى	
Function notation	
نەخشەى جيا	
One-to-One function	
نەخشەى گشتگر	
Onto function	
نەخشەى پادەدارى	
Polynomial function	
Degree	پلە
Coefficient	ھاوكلەكە
ھاوكلەكى سەرەكى	
Leading Coefficient	
Constant term	پادەى نەگۆر

لە پۆلى يازدەم فېرېبويت كە دەتوانرێت پىناسەى نەخشە بەرپىگايى جياواز بكرێت. بەلام لە پۆلى دوازدەدا گرنگى دەدەين بە شێوێ بنەرەتى نەخشەكان كە بەھۆى ھاوكيشەى جەبرى پىناسەكراون. بۆ نموونە ھاوكيشەى $x^2 + 2y = 1$ دەتوانرێت گۆراوى پەيوەستى y وەك نەخشەيەك بەپيى گۆراوى نازادى x پىناسە بكرێت. بۆ ئەمەش، ھاوكيشەكەى پېشوو بەپيى y شيكار دەكەين و بەھايەكەى وەك برێك دەنووسين جگە لە x ھىچ گۆراوى ترى تێدانەبێت.

$$y = \frac{1}{2}(1 - x^2)$$

$$f(x) = \frac{1}{2}(1 - x^2)$$

بە نووسىنى نەخشەكە بە شێوێكەى پېشوو دەوترىت نووسىنى نەخشەيى نەخشەكە. نووسىنى نەخشەيى سوودى زۆرى ھەيە، ئەويش بەشێوێكەى پوون گۆراوى نازاد x و گۆراوى پەيوەست $f(x)$ دياريدەكات و لەگەڵ ناوى نەخشەى f . ھەروەھا ھەژمارکردنى بەھايى نەخشەكە ئاسانتر دەكات كاتىك گۆراوى سەرەست بەھايەكى ديارىكراو وەرەگرێت. بۆ نموونە، بۆ ھەژمارکردنى بەھايى نەخشەى $f(x) = 2x^2 - 4x + 1$ كاتىك $x = -2$ بە لەجياتيدانانى بەھايەكەى x ، و ھەژمارى بەھايى ژمارەيى برەكە بكە كە لە ئەنجامى لەجياتيدانانەكەدا دەرەچيێت.

$$f(-2) = 2(-2)^2 - 4(-2) + 1 = 2(4) + 8 + 1 = 17$$

لەبىرت بێت كاتىك لەجياتى x بەھايەكى ديارىكراوى a لە نەخشەى $f(x)$ دادەنێت ئەوا ئەو بەھايەى $f(a)$ كە بە دەستيدەھيێت، برىتییە لە وێنەى x بە نەخشەى f .

نمونه 1

دۆزیننه وهی به های نه خشه

به به کارهیتانی نه خشه ی $f(x) = x^2 + 7$ به های ههر بریک بدۆزه وه.

ج $\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ کاتیک $\Delta x \neq 0$

ب $f(b-1)$

ا $f(3a)$

شیکار

ا $f(3a) = (3a)^2 + 7 = 9a^2 + 7$

ب $f(b-1) = (b-1)^2 + 7 = b^2 - 2b + 1 + 7 = b^2 - 2b + 8$

ج $\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{(x+\Delta x)^2 + 7 - (x^2 + 7)}{\Delta x}$
 $= \frac{x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 + 7 - x^2 - 7}{\Delta x} = \frac{2x\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = 2x + \Delta x$

تیبینی: به بری $\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ دهوتریت نهجامی دابه شکردنی دوو جیاوازیه که، که پۆلیکی گرنگی ههیه له ههژمارکردنی جیاکاریدا. ههروهک له دواتر دهیبینیت.

1. به به کارهیتانی نه خشه ی $f(x) = \frac{1}{x}$ به های ههر بریک بدۆزه وه.

ج $\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ کاتیک $\Delta x \neq 0$

ب $f(\sqrt{3})$

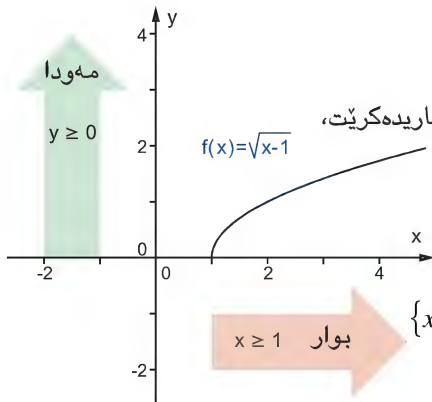
ا $f(3a)$



بوار ی نه خشه و مهوداکه ی

بوار

بوار ی نه خشه یه که به ریگای ئاشکرا و ریگای نا ئاشکرا دیاریده کریت، به به کارهیتانی ئه و هاوکیشه ی نه خشه که پیناسه دهکات. بۆ نمونه:



• بوار ی نه خشه ی $f(x) = \frac{1}{x^2 - 4}$ کاتیک $4 \leq x \leq 5$

به شیوه ی ئاشکرا پیناسه کراوه. که بریتیه له $\{x/4 \leq x \leq 5\}$ تیبینی ئه وه بکه ژیره جیاوازه له له ماوه ی $4 \leq x \leq 5$

• بوار ی نه خشه ی $f(x) = \frac{1}{x^2 - 9}$ به شیوه ی نا ئاشکرا

پیناسه کراوه، که بریتیه له کۆمهله ی ژماره راستیه کان کهوا دهکات $x^2 - 9$

یه کسان نه بیّت به 0، واتا $x \neq \pm 3$ ئه و بواره بریتیه له $\{x/x \neq \pm 3\}$.

مهودا

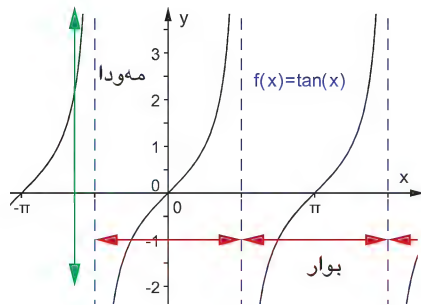
مهودا بۆ ههر نه خشه یه کی f ، بریتیه له کۆمهله ی ژماره راستیه کان که به هایهکانی نه خشه که دهیگرته وه، واتا کۆمهله ی $f(a)$ که a له بوار ی نه خشه ی f دایه.

دهتوانیت مهودای نه خشه ی f به سهیرکردنی پوونکردنه وه که یان به سهیرکردنی ئه و هاوکیشه ی پیناسه ی دهکات دیاریبکهیت. بۆ نمونه:

• مهودای نه خشه ی $f(x) = \frac{1}{x}$ بریتیه له $\{y/y \neq 0\}$ چونکه $\frac{1}{x}$ نابیت بکاته 0. دهکریت یه کسان بیّت به ههر به هایه که جیاوازه بیّت له 0.

• مهودای نه خشه ی $f(x) = \sin x$ بریتیه له $\{y/-1 \leq y \leq 1\}$ چونکه $\sin x$ نا کریت ئه و به هایانه وه برگیریت که له دهره وه ی ماوه ی $[-1, 1]$ دایه.

نمونه 2



دۆزىنەۋەى بوارى نەخشە و مەوداكەى

بوار و مەوداى ھەر نەخشەيەك بدۆزەۋە.

$f(x) = \tan x$ **ب**

$f(x) = \sqrt{x-1}$ **ا**

شىكار

ا بوارى نەخشەكە برىتتپە لە كۆمەلەى ژمارە

راستىيەكانى كە پاسەدانى $x-1 \geq 0$ دەكات، كە

برىتتپە لە ماۋەى $[1, +\infty)$ مەوداى نەخشەكە برىتتپە

لە كۆمەلەى ژمارە راستىيەكانى سالب نىن واتا $[0, +\infty)$

چونكە $\sqrt{x-1}$ ناكىرئىت سالب بىت.

ب بوارى نەخشەكە برىتتپە لە كۆمەلەى ژمارە راستىيەكانى كە پاسەدانى $x \neq \frac{\pi}{2} + n\pi$

كاتىك $n \in I$ (Integer) دەكەن. بەلام مەوداكەى برىتتپە لە كۆمەلەى ھەموو ژمارە راستىيەكان.

2. بوار و مەوداى ھەر نەخشەيەك بدۆزەۋە.



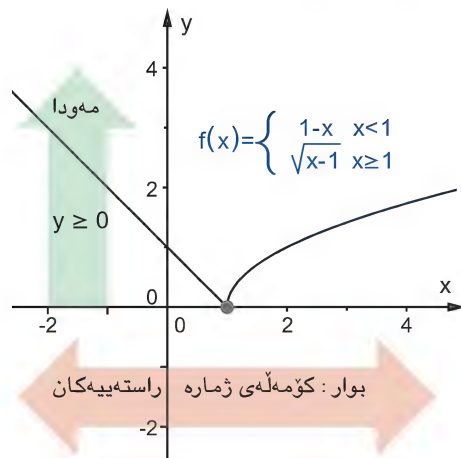
$f(x) = \frac{1}{\sin x}$ **ب**

$f(x) = \sqrt{1-x^2}$ **ا**

نمونه 3

دۆزىنەۋەى بوار و مەوداى نەخشەى پىسا پەلدار

بوار و مەوداى نەخشەى $f(x) = \begin{cases} 1-x & x < 1 \\ \sqrt{x-1} & x \geq 1 \end{cases}$ بدۆزەۋە.



شىكار

لەبەرئەۋەى نەخشەكە پىناسە كراۋە كاتىك $x < 1$ بە نەخشەى $f(x) = 1-x$ و كاتىك $x \geq 1$ بە

نەخشەى $f(x) = \sqrt{x-1}$ ، كە واتە مەوداكەى برىتتپە لە كۆمەلەى بەھاكانى $f(x)$ كاتىك $x \geq 1$

واتە $\{x : x \geq 0\}$ لەگەل كۆمەلەى بەھاكانى $f(x)$ كاتىك $x < 1$ واتە $\{x : x \geq 0\}$. كە واتە

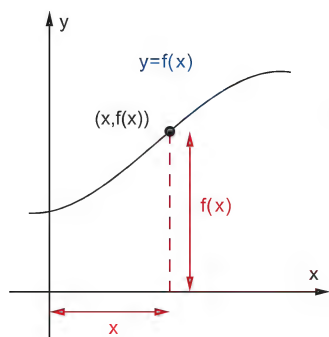
مەوداى ئەم نەخشەيە برىتتپە لە $\{x : x \geq 0\}$.

3. بوار و مەوداى نەخشەى $f(x) = \begin{cases} 3-x & x < 3 \\ \sqrt{x-3} & x \geq 3 \end{cases}$ بدۆزەۋە.



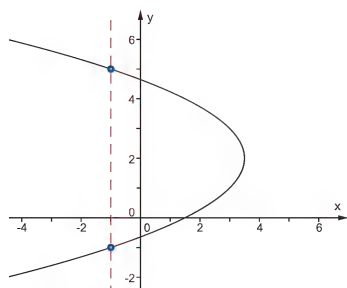
به نه‌خشه‌ی f ده‌وتریت نه‌خشه‌ی جیا، ئه‌گه‌ر هه‌ر دانه‌یه‌کی y له مه‌ودا‌که‌ی به‌ته‌نها دانه‌یه‌کی x له بواره‌که‌ی به‌سترا‌بیت، به‌واتایه‌کی تر: دوو دانه‌ی x_1 و x_2 له دانه‌کانی بواره‌که‌ی ده‌بن ئه‌گه‌ر به‌هایه‌کانی $f(x_1)$ و $f(x_2)$ یه‌کسان بن، نه‌خشه‌ی یه‌که‌م له نمونه‌ی 2 نه‌خشه‌یه‌کی جیا به‌لام نه‌خشه‌ی نمونه‌ی 1 نه‌خشه‌یه‌کی جیا نییه. و به نه‌خشه‌ی f له کۆمه‌له‌ی A بۆ کۆمه‌له‌ی B ده‌وتریت نه‌خشه‌یه‌کی گشت‌گه‌ر. ئه‌گه‌ر مه‌ودا‌که‌ی دانه‌کانی B به ته‌واوی بگرێته‌وه. نه‌خشه‌ی دووهم له نمونه‌ی 2 نه‌خشه‌یه‌کی گشت‌گه‌ر.

پوونکردنه‌وه‌ی نه‌خشه‌که



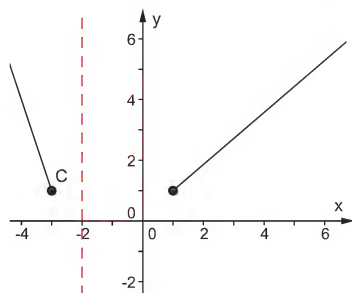
پوونکردنه‌وه‌ی نه‌خشه له‌هه‌موو خاڵه‌کانی $(x, f(x))$ پێک‌دێت کاتی‌ک x هه‌موو به‌هایه‌کانی بواره‌ی نه‌خشه‌که وه‌ر‌ده‌گرێت. سه‌یری وێنه‌ی به‌رام‌به‌ر بکه، و تێبینی ئه‌مانه‌ی خواره‌وه‌بکه:

- x بریتیه له دووری جه‌بری (موجه بێت یان سالب) نیوان خاڵه‌که و ته‌وه‌ری y .
- $f(x)$ بریتیه له دووری جه‌بری نیوان خاڵه‌که و ته‌وه‌ری x .

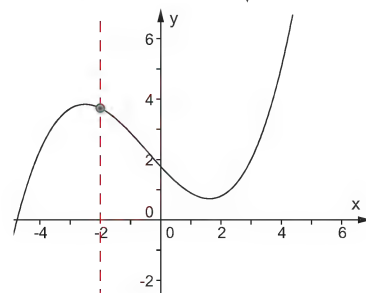


پوونکردنه‌وه‌که نه‌خشه دهنوینیت

ئه‌گه‌ر راسته‌هێڵیکی ئه‌ستوون بکێشیت ئه‌وا به‌لایه‌نی زۆر پوونکردنه‌وه‌ی نه‌خشه‌که یه‌ک‌جار ده‌برێت. له‌م تێبینیه‌وه به‌تاقیکردنه‌وه‌ی هه‌زری ده‌توانیت بریار ده‌ی ئه‌گه‌ر وێنه‌ی پوونکردنه‌وه‌ی بۆ نه‌خشه‌ی به‌ن‌ه‌رت ده‌گه‌رێته‌وه یان نا. به‌م تاقیکردنه‌وه‌یه ده‌وتریت تاقیکردنه‌وه‌ی راسته‌هێڵی ئه‌ستوونی ئه‌گه‌ر راسته‌هێڵی ئه‌ستوونی وێنه پوونکردنه‌وه‌یه له خاڵێک زیاتر به‌رپێت، ئه‌و وێنه‌یه نه‌خشه نانوینیت وێنه پوونکردنه‌وه‌یه لای چه‌پ نه‌خشه نانوینیت. چونکه راسته‌هێڵی ئه‌ستوونی $x = -1$ له دوو خاڵی جیا‌وا‌ز ده‌برپێت به‌لام دوو وێنه‌که‌ی تر نه‌خشه دهنوینن.

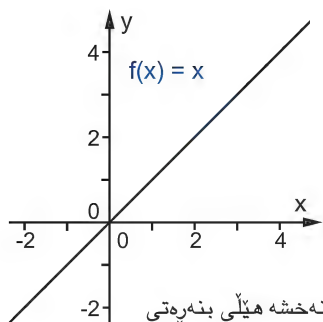


پوونکردنه‌وه‌که نه‌خشه دهنوینیت

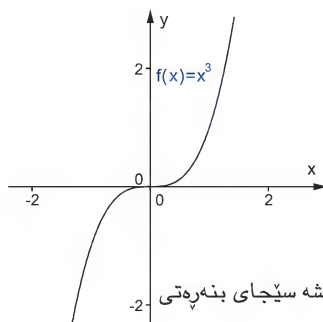


پوونکردنه‌وه‌که نه‌خشه دهنوینیت

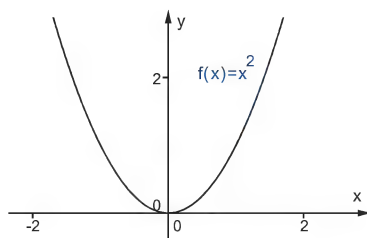
شێوه‌کانی خواره‌وه پوونکردنه‌وه‌کانی 11 له نه‌خشه به‌ن‌ه‌رتیه‌کان پێش‌انداده‌ات. هه‌ول‌ده جیا‌یان‌بکه‌یه‌ته‌وه و ئه‌و نه‌خشه دیاری‌بکه که هه‌ر یه‌کێکیان دهنوینیت.



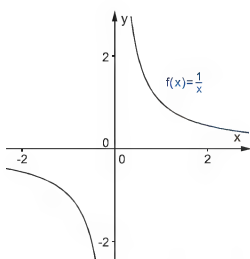
نه‌خشه هێڵی به‌ن‌ه‌رتی



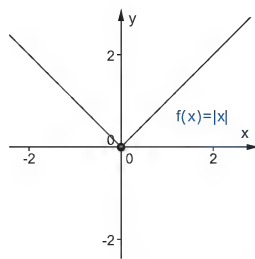
نه‌خشه سی‌جای به‌ن‌ه‌رتی



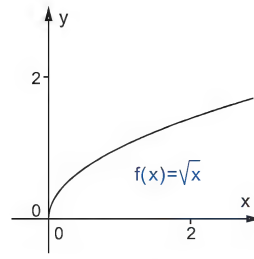
نه‌خشه دوو‌جای به‌ن‌ه‌رتی



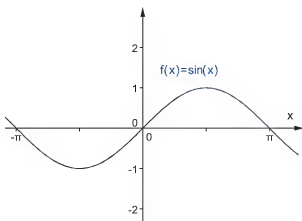
نەخشەى ھەلگەراۋى بىنەپەتى



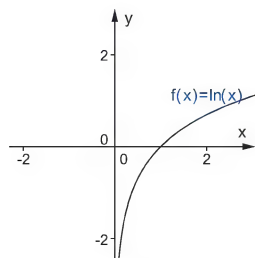
نەخشەى بەھەل پۈتۈ بىنەپەتى



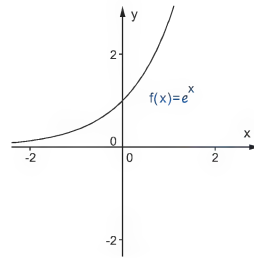
نەخشەى پەگى دوو جاي بىنەپەتى



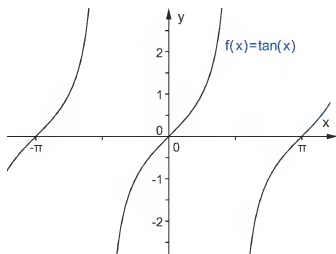
نەخشەى سايىنى بىنەپەتى



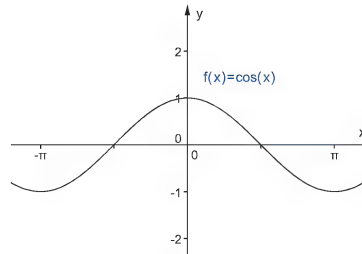
نەخشەى لۇگارىتمى بىنەپەتى



نەخشەى توانى بىنەپەتى



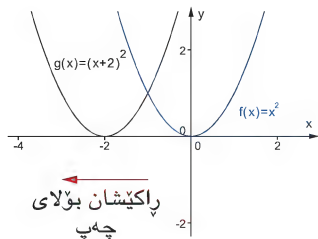
نەخشەى تانجىتى بىنەپەتى



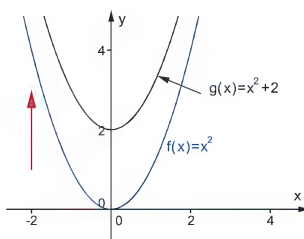
نەخشەى كۇسايىنى بىنەپەتى

جىگۈرۈكى نەخشەكان

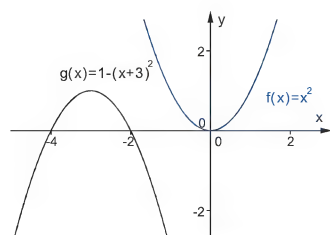
دەتوانىت نەخشەكان لە كۆمەللەكان يان خىزانەكان پۆلىنېركىت. پۈنكردنەۋى نەخشەكانى ھەر خىزانىك بەۋە جىادەكرىنەۋە كە ھەمان شىۋەى گىشتيان ھەيە. ئەگەر خىزانى نەخشە دوو جايىەكان ۋەربىگىت، دەبىنىت كە پۈنكردنەۋەكانيان ھەمان شىۋەى بىنەپەتيان ھەيە، ھەرۈك لەم وىنانەى خوارەۋە دىاردەكەون.



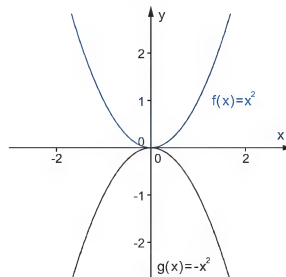
پاكىشان بۆلەى چەپ



پاكىشان بۆلەى سەرۋە



پاكىشان بۆلەى چەپ پاشان وىنەدانەۋە بەدەۋرى
تەۋەرى x لە پاشان پاكىشان بۆلەى سەرۋە.



پاكىشان بۆلەى سەرۋە

ھەر پروونكردنە ۋە يەك لە پروونكردنە ۋەكانى پېشوو برىتېيە لە جېگۇرپكى نەخشە بنەپرتىيەكان. چوار شىۋەكەى پېشوو سى لەو جېگۇرپكىيە بنەپرتىيە پېشان دەدات. پاكىشان بۇلاى سەرۋە و پاكىشانى بۇلاى چەپ و وئەدانەۋە بەدەۋرى تەۋەرى x . دەتوانىت جېگۇرپكىيەكان دىاربېكەيت كە پروونكردنەۋەى نەخشە بنەپرتىيەكە دەكاتە پروونكردنەۋەى نەخشەى يەككە لە لقەكانى بەبى كىشانى دوو پروونكردنەۋەكە.

ئەگەر نەخشەى بنەپرتى بىكاتە نەخشەى $f(x) = x^2$ ئەوا پروونكردنەۋەى ئەو چوار نەخشەى برىتېن لە:

$y = f(x) + 2$	پاكىشانى بۇلاى سەرۋە بە بېرى دوو يەكە
$y = f(x + 2)$	پاكىشانى بۇلاى چەپ بە بېرى دوو يەكە
$y = -f(x)$	وئەدانەۋە بەدەۋرى تەۋەرى x
$y = -f(x + 3) + 1$	پاكىشان بۇلاى چەپ پاشان وئەدانەۋە بەدەۋرى تەۋەرى x پاشان
	پاكىشان بۇلاى سەرۋە

جېگۇرپكىيە بنەپرتىيەكان ($c > 0$)

$y = f(x)$	پروونكردنەۋەى بنەپرتى
$y = f(x - c)$	پاكىشانى ئاسۇيى بۇلاى راست بە بېرى c يەكە
$y = f(x + c)$	پاكىشانى ئاسۇيى بۇلاى چەپ بەبېرى c يەكە
$y = f(x) + c$	پاكىشانى ستوونى بۇلاى سەرۋە بەبېرى c يەكە
$y = f(x) - c$	پاكىشانى ستوونى بۇلاى خوارەۋە بەبېرى c يەكە
$y = -f(x)$	وئەدانەۋە بەدەۋرى تەۋەرى x
$y = f(-x)$	وئەدانەۋە بەدەۋرى تەۋەرى y
$y = -f(-x)$	وئەدانەۋە بەدەۋرى خالىى بنەپرت

پۇلېنكردى نەخشەكان

پېناسەى چەمكى نوپى نەخشە بۇ ھەۋلى زانكانى بېركارى لەھەردوو سەدەى ھەقدەھەم و ھەژدەھەم دەگەرپتەۋە. ۋە نووسىنى نەخشەى $y = f(x)$ بۇ زانا لېۋنارد أولر Leonhard Euler دەگەرپتەۋە. لە كۇتايى سەدەى ھەژدەھەم زانكان بەمە گەيشتن: دەتوانرىت نموونە بېركارىيەكان بدۆزەيەۋە بۇ لېكۇلېنەۋەى زۆر لە پرسىارەكانى ژيانى پۇژانە بە بەكارھىنانى كۆمەللە نەخشەيەك كە بە نەخشە سادەكان ناويان دەبرد بەكاربھېئىرىت.

نەخشە سادەكان پۇلېن دەرگىن بۇ سى چەشن پېشتەر لە پۇلەكانى دەيەم و يازدەھەم خويىندوتە:

- ◀ نەخشە جەبىرىيەكان (پادەدارەكان، پېژەبىيەكان، رەگىيەكان).
- ◀ نەخشە سېگۇشەبىيەكان (نەخشەكانى ساين و كۇسايىن و تانجىنت).
- ◀ نەخشە تۋانىيەكان و لۇگارىتمىيەكان.

لە نەخشە زۆر باۋەكان نەخشە پادەدارەكانە. شىۋەى گشتى نەخشەى پادەدار برىتېيە لە:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 ; a_n \neq 0$$



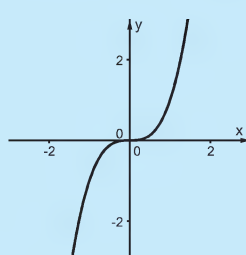
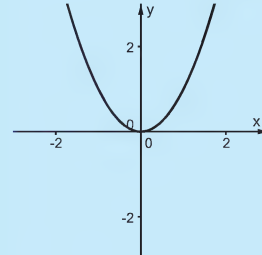
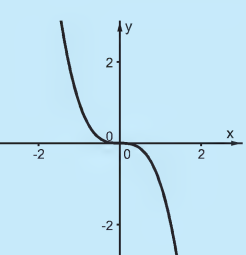
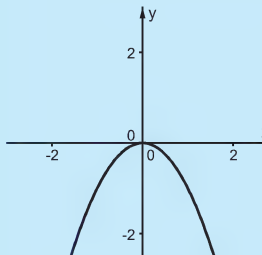
لېۋنارد أولر 1707 – 1783

سەرەپاي بەشدارىكردى لەھەموو لقەكانى بېركارى، أولر لە زانا پېشەنگەكان بوو كە ھەژماركردى جىاكارى و تەۋاكارى لەسەر پرسىارەكانى ژيانى پۇژانە لە فېزىيادا جېئېچىكر. لەزۇرىيەى بەرھەمەكانى بايەتەكانى ۋەك دروستكردى كەشتىيەكان و زانستى دەنگەكان و زانستى پرووناكى، ۋە فەلەك و ميكانىك و كايە مۇگناتىسسىيەكانى باسكرىدوۋ.

كاتىك ژماره‌ى ته‌واوى موجه‌ب n برىتييه له پله‌ى نه‌خشه‌كه و ژمار پاستيه‌كانى $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ هاوكۆلكه‌كانيه‌تى، و هاوكۆلكه‌ى a_n هاوكۆلكه‌ى سهره‌كى و هاوكۆلكه‌ى a_0 پاده‌ى نه‌گۆره‌ يان هاوكۆلكه‌ى نه‌گۆره‌. وا باوه‌ پيته‌ نيشان‌كراوه‌كانى a_i بۆ نووسىنى هاوكۆلكه‌كانى نه‌خشه‌ پاده‌داره‌كه به‌كاربه‌ئزىت. كاتىك هاوكۆلكه‌ى نه‌و نه‌خشانه‌ى له پله‌ى نزم‌دان به‌ پيته‌ جياوازه‌كان ده‌نوسرىن وه‌ك له‌م خشته‌ى خواره‌وه‌ ده‌رده‌كه‌ويت.

پله	شپۆه‌كه‌ى	ناوه‌كه‌ى
نه‌خشه‌پيه‌كه‌ى پاده‌دارى پله 0	$f(x) = a$	نه‌خشه‌ى نه‌گۆره
نه‌خشه‌پيه‌كه‌ى پاده‌دارى پله 1	$f(x) = ax + b$	نه‌خشه‌ى هپلى
نه‌خشه‌پيه‌كه‌ى پاده‌دارى پله 2	$f(x) = ax^2 + bx + c$	نه‌خشه‌ى دووجابى
نه‌خشه‌پيه‌كه‌ى پاده‌دارى پله 3	$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$	نه‌خشه‌ى سىجايى

ده‌كرىت له‌ پرونكرده‌وه‌ى نه‌خشه‌ى پاده‌دارى كه نه‌گۆره‌ نه‌بىت چه‌ندىن خالى جىگۆركى هه‌بىت. كه بيسنور سهره‌كه‌ويت يان داده‌به‌زىت كاتىك x به‌ره‌و $+\infty$ يان $-\infty$ ده‌جوولىت. به‌ پشت به‌ستن به‌ پله‌ى جووتى يان تاكى نه‌خشه‌كه و نيشانه‌ى هاوكۆلكه‌ سهره‌كى ده‌توانرئ سىفه‌تى پرونكرده‌وه‌ى نه‌خشه‌كه ديارىبكرئ كاتىك x به‌ره‌و $-\infty$ يان $+\infty$ ده‌جوولىت. ئەم خشته‌يه‌ پوخته‌ى ئەم سىفه‌ته‌يه‌.

بۆ نه‌خشه‌كه‌...	پله‌ى تاك بىت	پله‌ى جووت بىت
هاوكۆلكه‌ى سهره‌كى موجه‌ب بىت	$f(x) \rightarrow +\infty$ $x \rightarrow +\infty$ كاتىك  $f(x) \rightarrow -\infty$ $x \rightarrow -\infty$ كاتىك	$f(x) \rightarrow +\infty$ $x \rightarrow +\infty$ كاتىك  $f(x) \rightarrow -\infty$ $x \rightarrow -\infty$ كاتىك
هاوكۆلكه‌ى سهره‌كى سالب بىت	$f(x) \rightarrow -\infty$ $x \rightarrow +\infty$ كاتىك  $f(x) \rightarrow +\infty$ $x \rightarrow -\infty$ كاتىك	$f(x) \rightarrow -\infty$ $x \rightarrow +\infty$ كاتىك  $f(x) \rightarrow +\infty$ $x \rightarrow -\infty$ كاتىك

ئاويته كوردنى نەخشەكان

لەبۆلى يازدەھەم فېربوويت چۆن دەتوانریت نەخشە نوێیەكان بە بەكارھێنانی دوو نەخشەى f و g

پێناسە بكریت. ئەگەر $f(x) = 2x - 3$ و $g(x) = x^2 + 1$ ئەوا دەتوانیت ئەم نەخشەى خوارەو

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) = (2x - 3) + (x^2 + 1) = x^2 + 2x - 2 \quad \text{پێناسە بكەیت:}$$

$$(f - g)(x) = f(x) - g(x) = (2x - 3) - (x^2 + 1) = -x^2 + 2x - 4$$

$$(fg)(x) = f(x)g(x) = (2x - 3)(x^2 + 1) = 2x^3 - 3x^2 + 2x - 3$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{2x-3}{x^2+1}$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = 2(g(x)) - 3 = 2(x^2 + 1) - 3 = 2x^2 - 1$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = (f(x))^2 + 1 = (2x - 3)^2 + 1 = 4x^2 - 12x + 10$$

سەرئەنجام $f \circ g \neq g \circ f$

دۆزینەوێى بواری نەخشەى ئاويته

أ بواری نەخشەى $g \circ f$ بدۆزەوێى كاتیك $f(x) = x^2 - 1$ و $g(x) = \sqrt{x}$.

ب بواری نەخشەى $g \circ f \circ h$ بدۆزەوێى كاتیك $f(x) = \sqrt{x}$ و $g(x) = 3x$ و $h(x) = x - 2$.

شیکار

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \sqrt{f(x)} = \sqrt{x^2 - 1} \quad \text{أ}$$

بواری نەخشەى $g \circ f$ بریتییه لە كۆمەڵەى ژمارە

راستییهكانى x كه پاسەدانى $x^2 - 1 \geq 0$ دەكەن.

بۆ شیکارکردنى لاسەنگەى $x^2 - 1 \geq 0$ ، پوونکردنەوێى نەخشەى

$f(x) = x^2 - 1$ بكێشه. كۆمەڵەى ژمارە راستییهكانى x كه

پاسادانى $x^2 - 1 \geq 0$ دەكات بریتییه لە كۆمەڵەى ژمارە

راستییهكانى پاسادانى $x \leq -1$ یان $x \geq 1$ دەكەن.

كهواته بواری نەخشەى $g \circ f$ بریتییه لە $\{x \leq -1 \text{ یان } x \geq 1\}$.

$$(f \circ g \circ h)(x) = f(g(h(x))) = f(g(x - 2)) = f(3(h(x))) \quad \text{ب}$$

$$= \sqrt{3(x - 2)}$$

بواری نەخشەى $g \circ f \circ h$ بریتییه لە كۆمەڵەى ژمارە راستییهكان.

كهواته، دهكاتە $(x - 1) \geq 0$ كهوا $\{x : x \geq 2\}$.

4. بواری نەخشەى $g \circ f$ بدۆزەوێى كه $f(x) = x^2 - 1$ ، $g(x) = \frac{1}{x}$.



3-1

راھێنان

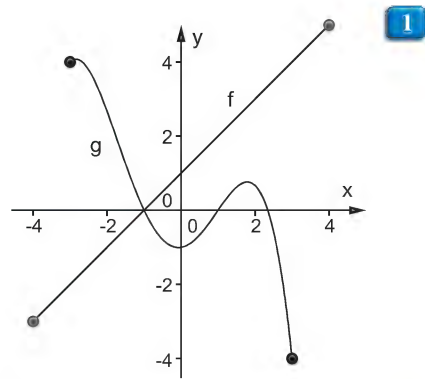
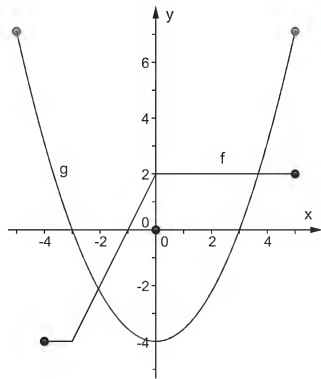
لە راھێنانی 1 و 2 پوونکردنەوێى f و g بۆ وەلامدانەوێى پرسیارەكانى خوارەو بەكاربھێنە.

ا بوار و مەوداى ھەر نەخشەيەك ديارىبىكە.

ب $f(-2)$ و $g(3)$ بدۆزەوہ.

ج بەھاكانى x بدۆزەوہ كە پاسەدانى $f(x) = g(x)$ دەكەن. د شىكارىك بۇ ھاوكىشەي $f(x) = 2$ بىخەملەنە.

ه شىكارىك بۇ ھاوكىشەي $g(x) = 0$ بىخەملەنە.



لەپرسىارى 3 تا 8 بەھايە داواكراوہكان ئەگەر لەتوانادا بۇ نەخشەكە ھەژمارىكە. ئەنجامەكان سادەبكە.

3 $f(x) = \sqrt{x+3}$ ؛ $f(-5)$ ، $f(6)$ ، $f(-2)$ ؛ $f(x+\Delta x)$ ، $f(t-1)$ ، $f(-2)$ ، $f(\sqrt{3})$ ، $f(0)$ ؛ $f(x) = 3-x^2$ 4

5 $f(x) = \cos 2x$ ؛ $f(0)$ ، $f(-\frac{\pi}{4})$ ، $f(-2)$ ، $f(\frac{\pi}{3})$ ؛ $f(x) = x^3$ ؛ $\Delta x \neq 0$ ؛ $\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ 7

6 $f(x) = x^3 - x$ ؛ $\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$ 8

8 $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-1}}$ ؛ $\frac{f(x)-f(2)}{x-2}$ 11

لە پرسیارى 9 تا 11 بوار و مەوداى ھەر نەخشەيەك بدۆزەوہ.

11 $f(x) = \frac{2}{x-1}$ 10

10 $f(t) = \ln(1-t)$ 9

9 $f(x) = -\sqrt{x+3}$

لە پرسیارى 12 تا 14 بوارى ھەر نەخشەيەك بدۆزەوہ.

14 $f(x) = \frac{1}{|x+3|}$ 13

13 $f(x) = \sqrt{x^2 - 3x + 2}$ 12

12 $f(x) = \sqrt{x} + \sqrt{1-x}$

لە پرسیارى 15 و 16 بەھايە داواكراوہكانى نەخشەكە بدۆزەوہ.

15 $f(x) = \begin{cases} 2x+1 & x < 0 \\ 2x+2 & x \geq 0 \end{cases}$ ؛ $f(-1)$ ، $f(0)$ ، $f(2)$ ، $f(t^2+1)$ 16

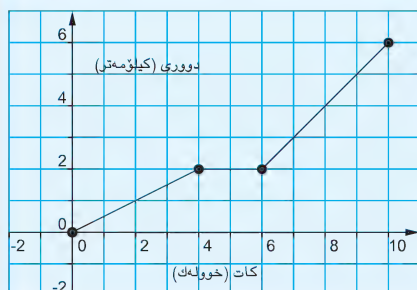
16 $f(x) = \begin{cases} |x|+1 & x < 1 \\ -x+1 & x \geq 1 \end{cases}$ ؛ $f(0)$ ، $f(-3)$ ، $f(1)$ ، $f(3)$ ، $f(b^2+1)$

لە پرسیارى 17 و 18 بە پروونكردەوہى بوار و مەوداى ھەر نەخشەيەك بدۆزەوہ.

18 $f(x) = 2\sin \pi x$ 17

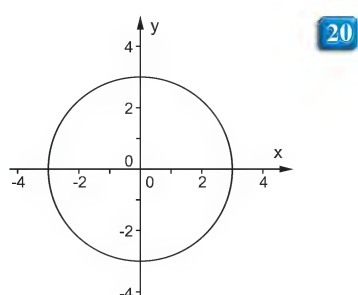
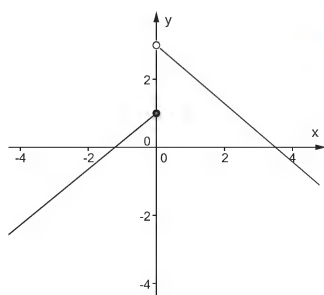
17 $f(x) = \sqrt{9-x^2}$

دەربارى چەمكەكان

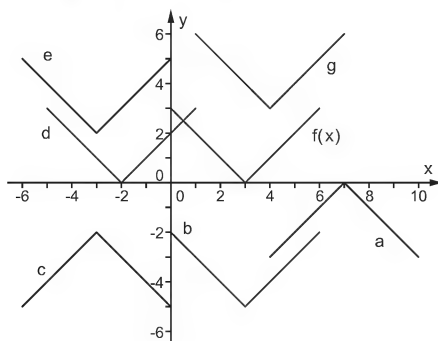


19 پروونكردەوہى بەرامبەر ئەو دورىيە دەردمخات كە خویندكارىك بە ئۆتۆمبىلەكەى برىويەتى (بەپى كات) لە كاتى دەرجوونى لە مالىەوہ بۇ زانكو. خىرايىەكەى لە نىوان $t=0$ ، $t=4$ چەندبوو؟ خىرايىەكەى لە نىوان $t=4$ ، $t=6$ چەندبوو؟ خىرايىەكەى لە نىوان $t=6$ ، $t=10$ چەندبوو؟ باسى لىخوړىنى خویندكارەكە بۇ ئۆتۆمبىلەكەى بكە.

له پرسیاری 20 و 21 دا، تاقیکردنه‌وه‌ی پاسته‌هیڅی ئه‌ستوونی به‌کاربه‌یینه تا بریاریده‌ی ئه‌گر وینه پوونکردنه‌وه‌یه‌که نه‌خشه‌یه یان نا.



له پاهیتانی 22 تا 27 پوونکردنه‌وه‌ی $y = f(x)$ بۆ دیاریکردنی پوونکردنه‌وه‌ی هه‌ر نه‌خشه‌یه‌که به‌کاربه‌یینه.



24 $y = -f(-x) - 2$

23 $y = f(x) - 5$

22 $y = f(x + 5)$

27 $y = f(x - 1) + 3$

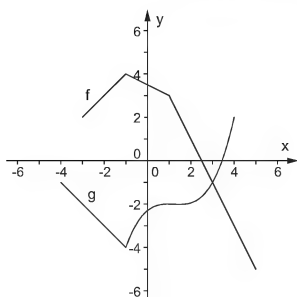
26 $y = f(x + 6) + 2$

25 $y = -f(x - 4)$

28 $(f \circ g)(x)$ و $(g \circ f)(x)$ بدۆزه‌وه کاتیگ $f(x) = x^2$ و $g(x) = \sqrt{x}$. ئایا $f \circ g = g \circ f$ ؟

29 $(f \circ g)(x)$ و $(g \circ f)(x)$ بدۆزه‌وه کاتیگ $f(x) = \frac{1}{x}$ و $g(x) = \sqrt{x + 2}$. ئایا $f \circ g = g \circ f$ ؟

30 وینه‌ی پوونکردنه‌وه‌ی به‌رامبه‌ر بۆ دۆزینه‌وه‌ی به‌هایه داواکراوه‌کان به‌کاربه‌یینه.



ج $g(f(5))$

ب $g(f(2))$

ا $(f \circ g)(3)$

و $f(g(-1))$

د $(g \circ f)(-1)$

ه $(f \circ g)(-3)$

31 پوونکردنه‌وه‌ی نه‌خشه‌ی $f(x) = \sqrt{x}$ بۆ کیشانی پوونکردنه‌وه‌ی هه‌ریه‌که له‌م نه‌خشانه‌ی خواره‌وه به‌کاربه‌یینه.

ج $p(x) = \sqrt{x - 2}$

ب $h(x) = -\sqrt{x}$

ا $g(x) = \sqrt{x} + 2$

32 پوونکردنه‌وه‌ی نه‌خشه‌ی f به‌رامبه‌ر بۆ کیشانی پوونکردنه‌وه‌ی هه‌ریه‌که له‌م نه‌خشانه‌ی خواره‌وه به‌کاربه‌یینه.

ج $f(x) + 4$

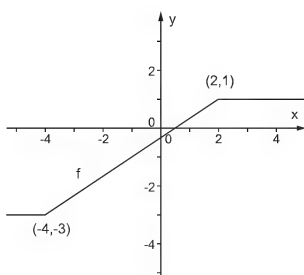
ب $f(x + 2)$

ا $f(x - 4)$

و $\frac{1}{2}f(x)$

د $2f(x)$

ه $f(x) - 1$



33 بازنهكان شیرین بهردیگی بۆ ناوگۆمهئاویکی وهستاوهههله، چهند بازنهیهکی هاوچهقی یهكه له دواى یهكه دروستبوو، نیووتهیردی بازنه فراوانهكه یان بهپیی نموونهی $r = 0.6t$ زیادهكات، كه t هیمای كاتی تیپهپوو بهسه رههلهانی بهردهكهیه به چركه و r نیووتهیردی بازنهكهیه بهپیی. پروویهری بازنهكه بهپیی یاسای $A = \pi r^2$ ههژمار دهكرییت. نهخشهی $(A \text{ or } t)$ بدۆزهوه. پروویهری بازنه فراوانهكه چهنده پاش 6 چركه له ههلهانی بهردهكه؟

34 سی نهخشهی f, g, h بدۆزهوه، بۆئیهوه $k = f \circ g \circ h$ كاتیك $k(x) = \sqrt{2x-2}$.

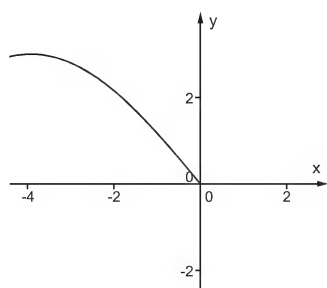
له پرسیارى 35 تا 38 دیاریبكه نهگهر نهخشهكه تاكه یان جووته.

36 $f(x) = \sqrt[3]{x}$

35 $f(x) = x^2(4-x^2)$

38 $f(x) = \sin^2 x$

37 $f(x) = x \cos x$



39 بواری نهخشهكه له وینهی بهرامبهر بریتییه له $-5 \leq x \leq 5$

وینهی پروونکردنهوهی نهخشهكه لههه رباریكدا تهواویكه:

ا نهخشهكه جووت بییت. ب نهخشهكه تاك بییت.

كاراماییه بیرکارییهكان لهوهی دییت 4 نهخشه و 4 خشتهی پیئراوهكان دهبینیت، ئهوه نهخشهیه بدۆزهوه كه ههر خشتهیهكه دهنوییت و بههای c دیاریدهكات.

$k(x) = \frac{c}{x}$ $h(x) = c\sqrt{|x|}$ $g(x) = cx^2$ $f(x) = cx$

x	-4	-1	0	1	4
y	-1	$-\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	1

41

x	-4	-1	0	1	4
y	-32	-2	0	-2	-32

40

x	-4	-1	0	1	4
y	6	3	0	3	6

43

x	-4	-1	0	1	4
y	-8	-32	پیناسه نهكراوه	32	8

42

پاست یان ههله؟ له پرسیارى 44 تا 47 دیاریبكه نهگهر پستهكه پاسته هویهكهی لیكبهدهوه، یان ههلهیه به دژه نمونهیهك بیسهلمیینه.

44 نهگهر f نهخشهیهك بییت و $f(a) = f(b)$ ئهوا $a = b$.

45 دهكرییت پاستههیاییكى ئهستوون بهلایهنى زۆرهوه یهكه جار پروونکردنهوهی نهخشه بپرییت.

46 نهگهر $f(-x) = f(x)$ ، x ههژماریهکی بواری f بییت، ئهوا پروونکردنهوهی نهخشهكه هاوچیییه لهگهل تهوهری y .

47 نهگهر f نهخشهیهك بییت، ئهوا $f(ax) = af(x)$.

48 بیریکهوه نهخشهی $f(x) = |x| + |x-2|$ بنوسه بهی بهكارهیانی بههای پرووت.

پیداچوونەوی بەش

لە پرسیاری 1 تا 4 یەکتەرپرینهکانی هەر نەخشەیکە دیاریبکە ئەگەر هەبوو.

1 $y = 2x - 3$ 2 $y = (x - 1)(x - 3)$ 3 $y = \frac{x-1}{x-2}$ 4 $y = \frac{4}{x}$

لە پرسیاری 5 و 6 دا ساغیکەو ئەگەر پروونکردنەوێکە لەگەڵ چی دا هاوچۆوونی هەبێت.

5 $x^2y - x^2 + 4y = 0$ 6 $y = x(x^4 - x^2 + 3)$

لە پرسیاری 7 تا 10 پروونکردنەوێکە هاوکیشەیکە بکێشە.

7 $-\frac{1}{3}x + \frac{5}{6}y = 1$ 8 $f(x) = 7 - 6x - x^2$

9 $f(x) = \sqrt{5 - x}$ 10 $f(x) = |x - 4| - 4$

لە پرسیاری 11 و 12 خالەکانی یەکتەرپرینی پروونکردنەوێکە بدۆزەو ئەگەر هەبوو.

11 $3x - 4y = 8$ $x + y = 5$ 12 $y - x^2 = 7$ $x - y + 1 = 0$

13 **بیریکەو** هاوکیشەیکە بنوسە کە پروونکردنەوێکە هاوچۆیە لەگەڵ خالی بنەرەت وە دوو خالی یەکتەرپرینی ئاسۆیی $x = -2$ ، $x = 2$ هەبێ.

14 **بیریکەو** بەهای k چەندە کە وادەکات پروونکردنەوێکە نەخشە $f(x) = kx$ بەخالە دیاریکراوەکە داپروات؟

ا $(1, 4)$ ب $(-2, 1)$ ج $(0, 0)$ د $(-1, -1)$

لە پرسیاری 15 و 16 لاری بەکاربێنە بۆ دیاریکردنی بەهای t بۆئەوێ خالەکان بکەوێ سەر یەک راستەهێڵ.

15 $(1, 1)$ ، $(0, t)$ ، $(-2, 5)$ 16 $(8, 6)$ ، $(t, -1)$ ، $(-3, 3)$

لە پرسیاری 17 تا 20 هاوکیشەیکە راستەهێڵیک بدۆزەو کە بە خالە دیاریکراوەکە دا دەرپوات و لاریبەکەشی دیاریکراوە.

17 $m = \frac{3}{2}$ ؛ $(0, -5)$ 18 $m = 0$ ؛ $(-2, 6)$

19 $m = -\frac{2}{3}$ ؛ $(-3, 0)$ 20 $(5, 4)$ لاریبەکە پێناسە نەکراوە

21 هاوکیشەیکە ئەو راستەهێڵەیکە بەخالە $(-2, 4)$ دادەرپوات بدۆزەو و ئەو سیفەتەشی هەبێ کە دیاریکراوە.

ا لاریبەکە $\frac{7}{16}$ ب تەریبە بە راستەهێڵ $5x - 3y = 3$

ج بە خالی بنەرەت دادەرپوات د تەریبە بە تەویری y

22 هاوکیشەیکە ئەو راستەهێڵەیکە دیاریبکە کە بە خالی $(1, 3)$ دادەرپوات و ئەو سیفەتەشی هەبێ کە دیاریکراوە.

ا لاریبەکە $-\frac{2}{3}$ ب ئەستوونە لەسەر راستەهێڵ $x + y = 0$

ج بەخالە $(2, 4)$ دادەرپوات د تەریبە بە تەویری x

23 **تیڭپای گۆران** نرخى ئامېرىكى نوئى 12 500 000 دینار، سالانه نرخه‌كه‌ی 850 000 دینار به‌پېی به‌کاربردنی كه‌مده‌كات. نه‌خشه‌یه‌كى هېلې بنووسه نرخى ئه‌و ئامېره پاش t سال له كړینى بنوښت. نرخه‌كه‌ی دواى 3 سال له كړینى ده‌بېته چه‌ند؟

24 $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2 & x < 0 \\ |x - 2| & x \geq 0 \end{cases}$ بدۆزه‌وه.

a) $f(-4)$

b) $f(0)$

c) $f(1)$

25 بوار و مه‌ودای هه‌ر نه‌خشه‌یه‌ك دياربكه‌.

a) $f(x) = \sqrt{36 - x^2}$

b) $f(x) = \frac{7}{2x-10}$

c) $f(x) = \begin{cases} x^2 & x < 0 \\ 2 - x & x \geq 0 \end{cases}$

26 $f(x) = 1 - x^2$ و $g(x) = 2x + 1$ بدۆزه‌وه.

a) $f(x) - g(x)$

b) $f(x)g(x)$

c) $g(f(x))$

27 **پووبه‌ر** شريتېك درېژيه‌كه‌ی 24 m لاكېشه‌یه‌كى لى دروست كرا كه لا بچووكه‌كه‌ی x بېت.

a) پووبه‌رى لاكېشه‌ی (A) به‌پېی x بنووسه.

b) بوارى نه‌خشه‌ی A دياربكه له پاشاندا وینه‌ی پوونكردنه‌وه‌كه‌ی به‌پېی ئه‌و بواره‌ی دياريتكرد بکېشه.

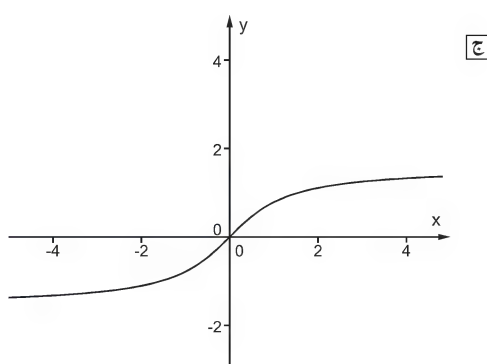
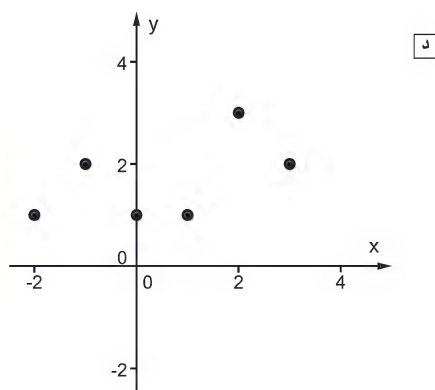
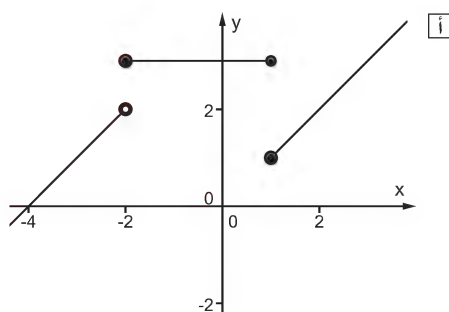
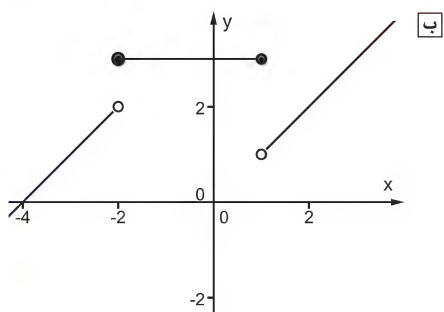
c) پوونكردنه‌وه‌ی نه‌خشه‌كه به‌كاربه‌ینه بو خه‌ملاندنى گه‌وره‌ترین پووبه‌ر كه لاكېشه‌كه پېكده‌هېنیت. رسته‌یه‌ك له‌سه‌ر پېوانه‌كانى لاكېشه‌كه بنووسه كه گه‌وره‌ترین پووبه‌ر ده‌دات.

28 پوونكردنه‌وه‌یى ئه‌و نه‌خشه‌یه كه بواره‌كه‌ی $\{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ بکېشه كه هه‌ر به‌هايه‌كه‌ی x له بوار به $y = x + 2$ ده‌به‌ستېته‌وه.

(تېبىنى ئه‌وه‌بكه بوارى نه‌خشه‌كه له ژماره‌یه‌كى سنووردار له‌به‌هه‌كان پېكه‌هاتووه).

ئامادەكارى بۆ تاقىكرىدەو

1 كام لەم پوونكرىدەوانە نەخشە نانوئىت؟



هەمويان نەخشەن.

2 پۆوتانى خالەكانى يەكترىپىنى پوونكرىدەوى دوو نەخشەى $f(x) = 3x + 1$ و $g(x) = x^2 - 3$ كامەپە؟

ا $x = 0$ ب $x = 1$ و $x = 4$ ج $x = -1$ و $x = -4$ د $x = -1$ و $x = 4$

هـ جگە لەوانە

3 كام لەم نەخشەنەى دىت تاكە؟

ا $f(x) = \cos x$ ب $f(x) = x^2 - x + 1$ ج $f(x) = x^3 - x$ د $f(x) = x^2 + x$

هـ هەمويان جووتن

4 كام لەم نەخشەنەى دىت تاك نىيە؟

ا $f(x) = \sin x + \frac{1}{x}$ ب $f(x) = x^2 - x + 1$ ج $f(x) = x^3 - x$ د $f(x) = x^3 + x$

هـ هەمويان تاكن

5 راسته‌هێڵی $7x - 3y = 5$ به کام لهم خالانهدا ناپوات؟

Ⓐ $(2, 3)$ Ⓑ $(1, \frac{2}{3})$ Ⓒ $(4, 11)$ Ⓓ $(-\frac{1}{7}, -2)$ Ⓔ به‌هموو خالێکانه داده‌پوات

6 لاری ئهو راسته‌هێڵه کامه‌یه که به‌دوو خالی $(6, 10)$ و $(-1, 4)$ داده‌پوات؟

Ⓐ $\frac{7}{6}$ Ⓑ $-\frac{7}{6}$ Ⓒ $\frac{6}{7}$ Ⓓ $-\frac{6}{7}$ Ⓔ هه‌یج یه‌ك له‌مانه

7 هاو‌کێشه‌ی ئهو راسته‌هێڵه کامه‌یه که به‌ خالی $(3, 10)$ داده‌پوات و ته‌ریبه به‌ راسته‌هێڵی $x - 3y = 1$ ؟

Ⓐ $y = \frac{1}{3}x + 9$ Ⓑ $y = 3x + 1$ Ⓒ $y = -3x + 19$ Ⓓ $y = -\frac{1}{3}x + 11$ Ⓔ هه‌یج یه‌ك له‌مانه

8 لاری ئهو راسته‌هێڵه کامه‌یه که ئه‌ستوونه له‌گه‌ڵ راسته‌هێڵی $2x + 3y + 9 = 0$ ؟

Ⓐ $\frac{2}{3}$ Ⓑ $-\frac{2}{3}$ Ⓒ $\frac{3}{2}$ Ⓓ $-\frac{3}{2}$ Ⓔ هه‌یج یه‌ك له‌مانه

9 $f(x) = \begin{cases} 3x + 4 & x \leq 2 \\ x^2 + 1 & x > 2 \end{cases}$. کام له‌مانه یه‌کسانه به‌ $f(3)$ ؟

Ⓐ 13 Ⓑ 10 Ⓒ 5 Ⓓ 3 Ⓔ هه‌یج یه‌ك له‌مانه

10 $f(x) = x^2 - 3x + 4$ کام له‌مانه یه‌کسانه به‌ $f(x+2) - f(2)$ ؟

Ⓐ $x^2 - 3x - 4$ Ⓑ $x^2 + x$ Ⓒ $x^2 + x - 8$ Ⓓ $x^2 - 3x + 4$ Ⓔ هه‌یج یه‌ك له‌مانه

11 $f(x) = 2 - x^2$ کام له‌مانه یه‌کسانه به‌ $\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ ؟

Ⓐ $\frac{x^2 - h - h^2}{h}$ Ⓑ $\frac{-2x^2 - h^2}{h}$ Ⓒ $-2x - h$ Ⓓ $\frac{1}{2}$ Ⓔ هه‌یج یه‌ك له‌مانه

12 بواری نه‌خشه‌ی $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$ کامه‌یه؟

Ⓐ $\{x/x \neq 1\}$ Ⓑ $\{x/x \neq -1\}$ Ⓒ $\{x/x \neq 0\}$ Ⓓ R Ⓔ هه‌یج یه‌ك له‌مانه

13 بواری نه‌خشه‌ی $f(x) = \frac{1}{x^2 - 3x + 2}$ کامه‌یه؟

Ⓐ $]-\infty, -2[\cup]-2, 1[\cup]1, +\infty[$ Ⓑ R Ⓒ $]-\infty, \frac{1}{2}[\cup]\frac{1}{2}, +\infty[$ Ⓓ $]-\infty, 1[\cup]1, 2[\cup]2, +\infty[$ Ⓔ هه‌یج یه‌ك له‌مانه

14 ئهو جیگۆرکێیه کامه‌یه که پروونکردنه‌وه‌ی نه‌خشه‌ی $f(x) = x^2$ بۆ پروونکردنه‌وه‌ی نه‌خشه‌ی $g(x) = (x+9)^2$ ده‌گۆرێت؟

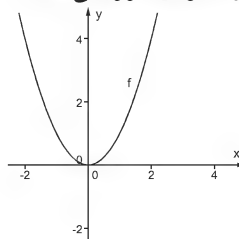
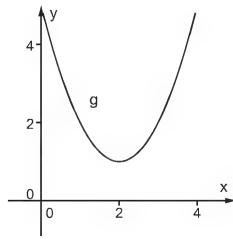
Ⓐ پراکێشان بۆلای سه‌ره‌وه به‌بهری 9 یه‌که. Ⓑ پراکێشان بۆلای خواره‌وه به‌بهری 9 یه‌که.

Ⓒ پراکێشان بۆلای راست به‌بهری 9 یه‌که. Ⓓ پراکێشان بۆلای چه‌پ به‌بهری 9 یه‌که.

Ⓔ هه‌یج یه‌ك له‌مانه

15 پروونكرندنه وهى نهخشه $f(x) = x^2$ به كار بهيئنه بۆ دۆزينه وهى هاوكيشهى نهخشه g كه

پروونكرندنه وهى دووهمى ههيه.



$g(x) = (x+2)^2 + 1$ [ج]

$g(x) = (x-1)^2 + 2$ [ب]

$g(x) = (x-2)^2 + 1$ [ا]

ههچ يهك له مانه [ه]

$g(x) = (x+1)^2 - 2$ [د]

16 $(f+g)(x)$ بدۆزه وه كاتيک $f(x) = 2x - 4$ و $g(x) = 1 + 3x$.

ههچ يهك له مانه [ه]

0 [د]

$-(x+3)$ [ج]

$x-3$ [ب]

$5x-3$ [ا]

17 $(fg)(3)$ بدۆزه وه كاتيک $f(x) = x$ و $g(x) = x^2 - 7$.

ههچ يهك له مانه [ه]

6 [د]

5 [ج]

29 [ب]

-13 [ا]

18 $(f \circ g)(x)$ بدۆزه وه كاتيک $f(x) = 4 - 2x^2$ و $g(x) = 2 - x$.

$-2x^3 - 4x^2 - 4x + 8$ [د]

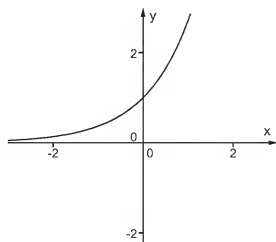
$2x^2 - 2$ [ج]

$2x^2 - 4$ [ب]

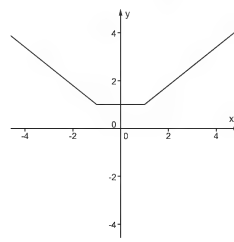
$4x^2 - 16x + 20$ [ا]

ههچ يهك له مانه [ه]

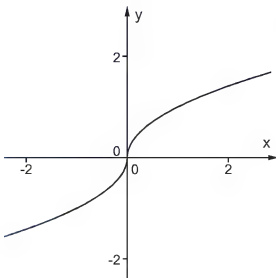
19 كام له پروونكرندنه وانهى خواره وه نهخشه جيا نانوئينى؟



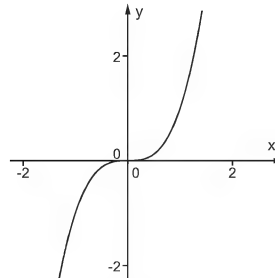
[ب]



[ا]



[د]



[ج]

هه موويان نهخشه جيا نانوئين.

20 سيفه تى نهخشه $f(x) = 3x^5 - 7x^2 + 2$ كامهيه كاتيک x دهچيى بۆ $-\infty$ ، و كاتيک دهچيى بۆ $+\infty$ ؟

[ا] نهخشهكه دهچيى بۆ $-\infty$ كاتيک x دهچيى بۆ $+\infty$ ؛ نهخشهكه دهچيى بۆ $+\infty$ كاتيک x دهچيى بۆ $+\infty$

[ب] نهخشهكه دهچيى بۆ $-\infty$ كاتيک x دهچيى بۆ $-\infty$ ؛ نهخشهكه دهچيى بۆ $-\infty$ كاتيک x دهچيى بۆ $+\infty$

[ج] نهخشهكه دهچيى بۆ $+\infty$ كاتيک x دهچيى بۆ $-\infty$ ؛ نهخشهكه دهچيى بۆ $-\infty$ كاتيک x دهچيى بۆ $+\infty$

[د] نهخشهكه دهچيى بۆ $+\infty$ كاتيک x دهچيى بۆ $-\infty$ ؛ نهخشهكه دهچيى بۆ $+\infty$ كاتيک x دهچيى بۆ $+\infty$

هه موويان نهخشه جيا نانوئين.

ئامانجەكان Limits

بەشى دووھم

وانەكان

1-2 دەروازەيەك بۆ ھەژمارکردنى

جياكارى و تەواوكارى

2-2 دۆزىنەوھى ئامانجەكان بە

پوونكرنەوھى و ژمارەيى

3-2 ھەژمارکردنى ئامانجەكان

تاقىكرنەوھى نيوھى بەش

4-2 نەخشە بەردەوامەكان

5-2 ئامانجە بېپايەنەكان

پېداچوونەوھ

ئامادەكارى بۆ تاقىكرنەوھ

ھەندىك لە جوتياران چەند جورىك لە

زىندەوھرى مشەخۆر بەكاردەھيىن بۆ

پاراستنى چىندراوھكانيان لەدەردو

بەلايەكان. نەخشە $D(t) = \frac{t^2}{90} + \frac{t}{3}$

نموونەيەكە بۆ زيادبوونى ئەو

زىندەوھرانە لەسەر رووھكىكا. تىكرپاي

گوپانى ئەو زىندەوھرانە چەندە؟ كاتىك 20

زىندەوھر لەسەر رووھكىك بىت.

ئایا تۆ ئامادەیت؟

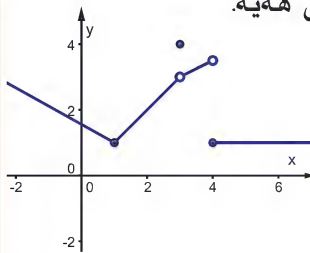
زاراوه کان

هەر دەسته واژەیهکی ستوونی لای راست به لیکدانه و دهکەیی له ستوونی لای چەپ بهبەستهوه.

1. نه‌خشی پړژهی ا. به‌های x گوره‌ده‌بیت و بیسنور زیاد ده‌کات.
2. x نژیکه‌بیته‌وه له $+\infty$ ب. کو‌مه‌لای ټو به‌هایانه‌ی نه‌خسه‌که و مریده‌گریټ کاتیټ x هه‌موو
3. نووسینی برپړکی پړژهی به‌هایه‌کانی بوار و مریده‌گریټ.
- ج. نه‌خسه‌یه‌که پړسایه‌که‌ی برپړکی پړژهییه.
4. مه‌ودای نه‌خسه د. نه‌خسه‌یه‌که بره‌که‌ی پړژیه‌که له‌خو‌ده‌گریټ.
- ه. نووسینی برپړکه به‌ شیوه‌ی پړژهی دوو برپړی دوو پاده‌یی که کو‌لکه‌ی هاو‌به‌ش له نو‌انیا‌ندا نییه.

خوینده‌وهی پوونکردنه‌وه‌کان

له راهیانی 2 و 3 دا نه خشه ی f به کار بهینه که روونکرده و دی به رامبه ری هیه.



- به‌های هریه که له $f(1)$ ، $f(2)$ ، $f(3)$ ، $f(4)$ ، $f(5)$ بدؤدوه.
پیسای نه‌خشهی f بنؤسه.

کردارەکان لەسەر نەخشەکان

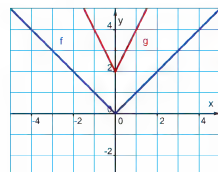
ریسای نه‌خشه‌ی $f \circ g$ و نه‌خشه‌ی $g \circ f$ بنووسه که $f(x) = x + 1$ و $g(x) = \sqrt{x}$

ئایا پەيوەندى پېچەوانە بۆ نەخشەى $y = 4x + 3$ لە نۆيان گۆراوەکانى x و y نەخشەيه؟ ئەگەر وەلا مەکت «بەليە» پەيوەندييه پېچەوانەکه به شيۆى نەخشە بنووسە ئەگەر وەلا مەکت «نەخيره» بەلگە بۆ وەلا مەکت پەينهوه

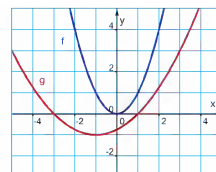
ئایا پەيوەندى پېچەوانەى نەخشەى $y = x^2$ لەنيوان دوو گۆراوى x و y نەخشەىه؟ ئەگەر وەللامەكەت «بەلەيە» پەيوەنديە پېچەوانەكە بە شۆەى نەخشە بنووسە ئەگەر وەللامەكەت «نەخیرە» بەلگە بۆ وەللامەكەت بەندە.

جيگورکي نەخشەکان

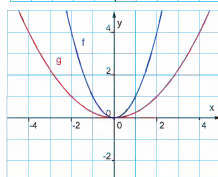
له راهینانی 7 تا 10 وینهی روونکردنه‌ودی نه‌خشه‌ی f و g دهرده‌که‌ویٔ. ئه‌و جی‌گۆرکییه‌ ئه‌ندازه‌یه‌ دیاربه‌ که وینه‌ی روونکردنه‌ودی f بۆ وینه‌ی روونکردنه‌ودی g ده‌بات و ریئاسی g بنووسه‌.



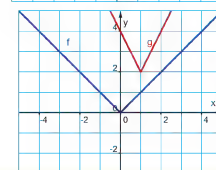
8



7



10



9

دەروازەیکە بۆ ھەژمارکردنی جیاکاری و تەواوکاری

Introduction to Calculus

ئامانجەکان

- لەجیاکاری و تەواوکاری و جیاوازییەکی لە جەبر تێدەگات.
- تێدەگات کە بابەتی لێکەوت بابەتێکی بنەڕەتی جیاکاری و تەواوکارییە.
- تێدەگات کە بابەتەکانی پووبەر بابەتێکی بنەڕەتیە لە جیاکاری و تەواوکاری.

سوود

ھەمیشە لەبیرت بێت جیاکاری و تەواوکاری وەک وانەیکە بنەڕەتی لە پۆلەدا دەخوێنێت. ئامانجی یەکەم فێربوونی چۆنەتی بەکارھێنانی ئەو بابەتەییە بۆ دروستکردنی نموونەکانی ژيانی پۆژانە بە ئامانجی شیکارکردن. ئەمەش بەبیرھێنانەوی ھەنگاوەکانی شیکارکردنی پرسیارەکانە:

1. لە تێگەیشتنی پرسیارەکانە دڵنیا بە پێداوەکان چین؟ داواکراو چییە؟

2. پلان دا بێ، چەند پێگایەکی جیاواز ھەیە دەتوانیت بەکاربھێنیت. بەدوای شێوازێک بگەرێ، پرسیارێکی ئاسانتر شیکاریکە، بە ھەنگاوەکان داچۆو، وێنەیکە پوونکردنەوی دروستبکە.
3. پلانەکەت جێبەجێیکە، دڵنیا بە کە وەڵامی پرسیارەکان داوەتەو. وەڵامەکە دا پێژە، بۆ نموونە لەجیاتێ نووسینی وەڵامەکە $x = 4.6$ بنوسە، «رووبەری شێوەکە 4.6 cm^2 »

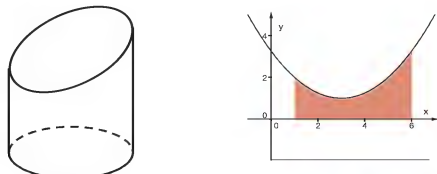
4. بە ھەنگاوەکاندا داچۆو ئایا وەڵامەکەت شیاو؟ ئایا پێگایەک بۆ دڵنیا بوون لە شیاویەکی ھەیە؟

جیاکاری و تەواوکاری چییە؟

ھەژمارکردنی جیاکاری و تەواوکاری بریتیە لە بیرکاری گۆپان (خێرای و تاودان) ھەروەھا بریتیە لە بیرکاری راستەھێڵی لێکەوت و لاری و پووبەر و قەبارەو درێژی و چەقی قورسای و چەمانەو و زۆر لە چەمکەکانی تر. ئەو بیرکارییە یارمەتی زانایەکان و ئەندازیارەکان و ئابووریناسەکاندا بۆ دروستکردنی نموونە کارایەکان بۆ لێکۆڵینەوی بارەکانی ژيانی پۆژانە. ھەژمارکردنی جیاکاری و تەواوکاری بە بیرکاری جوولە (Dynamic) دەناسرێت بە پێچەوانەی ئەو بیرکارییە تاکو ئیستا فێربوویت کە بەبیرکاری وەستاو Static وەسفەکرێت ئەمەش چەند نموونەیکە:

- دەتوانیت لێکۆڵینەو بۆ جوولانی تەنێک بەخێرایەکی نەگۆر بکەیت بەبەکارھێنانی ئەو بیرکارییە تاکو ئیستا فێربوویت لەکاتیکیدا پێویستت بە ھەژمارکردنی جیاکاری و تەواوکاری دەبێت بۆ لێکۆڵینەوی جوولە تەنێک خێرایەکی بەپێی کات دەگۆرێت.
- دەتوانیت لاری راستەھێڵێک دیاریبکەیت بەبەکارھێنانی ئەو بیرکارییە تاکو ئیستا فێربوویت بەلام بۆ دۆزینەوی لاری چەماوێکە لەخاڵێکدا پێویستت بە ھەژمارکردنی جیاکاری و تەواوکاری دەبێت.

- بۆ ھەژمارکردنی پووبەر یان قەبارە زۆر لە شێو تەنە ئەندازەییەکان دەتوانیت ئەو بیرکارییە تاکو ئیستا فێربوویت بەکاربھێنێت بەلام، بۆ دۆزینەوی رووبەری شێو ناپێکەکان پێویستت بە ھەژمارکردنی جیاکاری و تەواوکاری دەبێت، یان بۆ دۆزینەوی قەبارە ئەو تەنانە ی باونین.



بارەکانی پێشوو ھەمان کار لەخۆ دەگرن: دووبارە داڕشتنەوی ئەو لە پەردوودا فێربوویت بەبەکارھێنانی چەمکەکانی ئامانج و ھەروەھا، یەکێک لە وەڵامەکانی پرسیارە ھەژمارکردنی جیاکاری و تەواوکاری چییە؟ دەتوانین بلێین ھۆکاریکی ژمیریاری دەتوانرێت بنما تیۆرییەکانی ھەژمار بکریت لە مامەلەکردن لەگەڵ ئامانجەکان و جێبەجێکردنە کردارییەکان لەسەر رێسا و یاسا وردەکان بەکاربھێنێت. بە دەستەواژەیکە وردتر ھەژمارکردنی جیاکاری و تەواوکاری سی ئاست لەخۆدەگرێت ئاستی یەکەم: ئەو بیرکارییە تاکو ئیستا فێربوویت و ئاستی دووھم: ئاستی ئامانجەکانە و ئاستی سێھەم: ئاستی داتاشارا و تەواوکارییە.

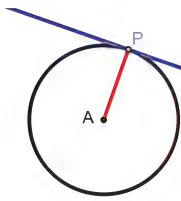
داتاشارا و تەواوکاری

ئامانجەکان

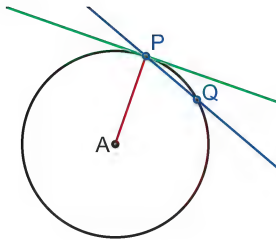
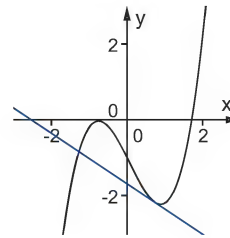
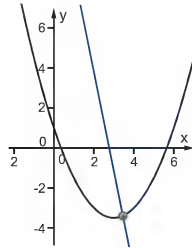
ئەو بیرکارییە تاکو ئیستا فێربوویت

چەمکی ئامانج بەردی بناغە لێکۆڵینەوی جیاکاری و تەواوکاری پێکدەھێنێت. بۆ ئەو چەند بیرۆکەیکەت لە پۆلی ئامانج لە ھەژمارکردنی جیاکاری و تەواوکاری لا دروستبێت. ئەمە کورتە باسیکە بۆ دوو بابەتی میژوویی لەم بابەتەدا: بابەتی لێکەوت و بابەتی پووبەر.

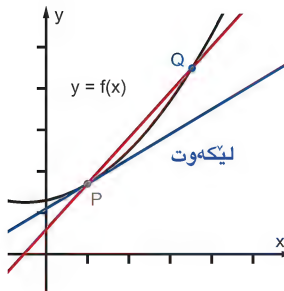
بابه تی لیکهوت



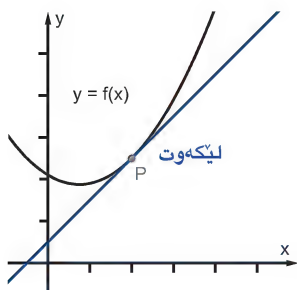
له پوله کانی پېشودا فیروویت که لیکهوتی بازنه یه که چه که کی A بیټ، له خالی P دا، بریتیه له و راسته هیله ی بازنه که تنها له خالی P دا دبرپټ. به شیوه یه کی گشتی ئه م پیناسه راست نابیت کاتیک کاره که په یوه ندی به وینه ی پروونکرده و ی نه خشه کانه وه هه بیټ، هه روه که له م دوو وینه ی خواره وه دهرده که ویت.



به لام لیکهوتی بازنه له خالی P دا له راستیدا، ئه ویه بره ی \overrightarrow{PQ} نژیکه بیټه وه کاتیک خالی Q له خالی P نژیکه بیټه وه، له ژیر پوښنایی ئه م تیبینیه وه ئه گهر تماشای لیکهوتی وینه ی پروونکرده و ی نه خشه ی $f(x)$ له خالی P بکه ی، وه که ئه و ی له بره ی \overrightarrow{PQ} نژیکه بیټه وه کاتیک خالی Q له P نژیکه بیټه وه.

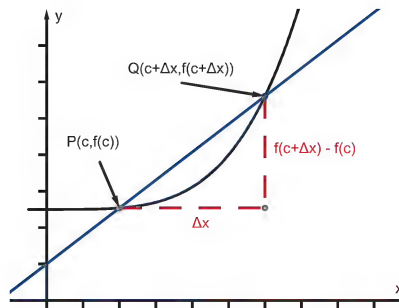
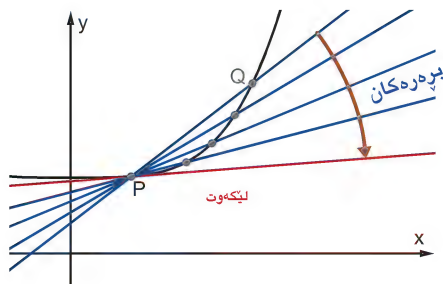


له پرسپاری لیکهوت نه خشه ی f و خالی P له سهر پروونکرده و یه کی دهرپټ، داوات لیده کات لیکهوتی پروونکرده و ی نه خشه که له و خاله دا بدوژیته وه هه روه که له وینه ی بهرامبه را دهرده که ویت.



جگه له و بارانه ی لیکهوتی ئه ستون دهرپټه خو، پرسپاری دوژینه و ی هاوکېشه ی لیکهوتی پروونکرده و ی نه خشه ی f له خالی P دا بو دوژینه و ی لاری ئه و لیکهوته دهرپټه وه، ده توانیت هه ژماری به های نژیکه یی ئه و لاری به که یت به به کاره ی نانی راسته هیله ی که به خالی لیکهوت P و خالی کی تر له سهر پروونکرده و ی نه خشه که دا دهرپوات، هه روه که له وینه ی بهرامبه ر دهرده که ویت. ئه و راسته هیله ی پییده و تریت بره ی پروونکرده و ی نه خشه که. ئه گهر $P(c, f(c))$ خالی لیکهوت بیټ و $Q(c + \Delta x, f(c + \Delta x))$ خالی کی تر بیټ له سهر روونکرده و ی نه خشه که ئه و لاری ئه و راسته هیله ی به و دوو خاله دا دهرپوات بریتیه له.

$$m = \frac{f(c + \Delta x) - f(c)}{(c + \Delta x) - c} = \frac{f(c + \Delta x) - f(c)}{\Delta x}$$



هه ر چند خالی Q له خالی P نژیکه بیټه وه، لاری بره رکه له لاری لیکهوت نژیکه بیټه وه، هه روه که له وینه ی لای چه پی سهره وه دهرده که ویت. ئه گهر بو بره رکه شوینکی کوتابی هه بیټ، ئه و به لاری لیکهوته که دهوتریت نامانجی لاری بره رکه. (دوای ده گه پښه وه بو ئه و بابته).

دۆزىنەۋە

ئەو خالانى دىن دەكەنە سەر پوونكرىنەۋە نەخشە $f(x) = x^2$.

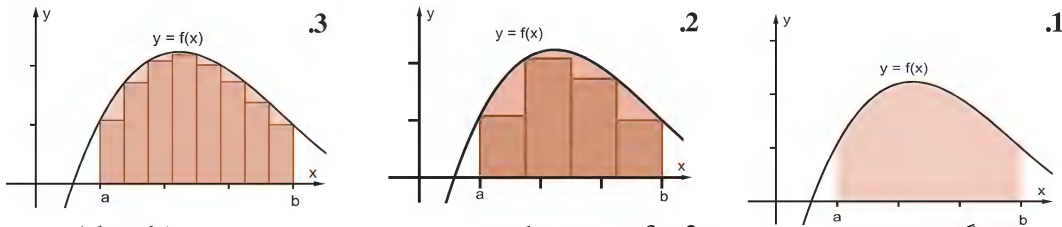
$$Q_3(1.01, f(1.01)), Q_2(1.1, f(1.1)), Q_1(1.5, f(1.5))$$

$$Q_5(1.0001, f(1.0001)), Q_4(1.001, f(1.001))$$

ئەو خالانى يەك لەدۋاى يەك لە خالى $P(1,1)$ نىكىدەنەۋە. لارى ئەو راستەھىلەى بەخالى P و Q_1 و ئەو راستەھىلەى بە خالى P و Q_2 ... دا دەپوات ھەژمارىكە. لەھەمان پووتەختى پۆوتانەكان وىنەى پوونكرىنەۋە نەخشەكەو راستەھىلەكانى كە لارىيەكانىان ھەژماركراۋە بكىشە. ئەو ئەنجامانەى دەستكەۋتوۋە بەكاربەينە بۇ دۆزىنەۋەى بەھاي نىكىبەى لارى لىكەۋتى پوونكرىنەۋەى نەخشەكە. لەخالى P دا.

بابەتى پووبەر

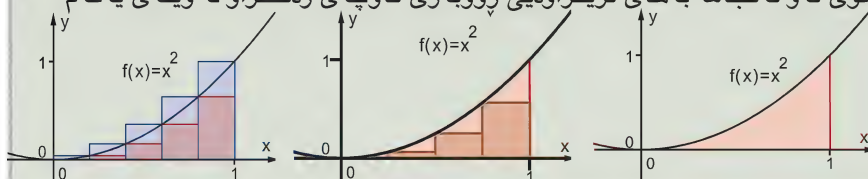
لە بابەتى لىكەۋت بىنيت چۆن چەمكى ئامانچ لەسەر لارى لىكەۋت بەمەبەستى دۆزىنەۋەى لارى نەخشە جىبەجىكرا، دوۋەم بابەتى مېژوۋىى جياكارى و تەۋاۋكارى برىتتىيە لە بابەتى ھەژماركرىنى پووبەرى ئەو ناۋچەيەى بە پوونكرىنەۋەى نەخشەكە سنووردراۋە. دەتوانرىت ئەم پرسىارانە بە بەكارھىنانى چەمكى ئامانچ شىكارىكرىت. ئەو چەمكە بە بەكارھىنانى پووبەرى لىكەشە جىبەجىدەكرىت بۇ دۆزىنەۋەى پووبەرى ئەو ناۋچانەى باۋنن. بۇ نموۋە: لەو ناۋچەيە پابىننى كە بە پوونكرىنەۋەى نەخشەى $y = f(x)$ و تەۋەرى x و ھەردوۋ راستەھىلەى ستوۋنى $x = a$ و $x = b$ سنووردراۋە ۋەك لەو وىنەيەدا دەردەكەۋىت.



ئەگەر سەيرى ھەردوۋ شىۋەى 2 و 3 سەرۋە بىكەيت، دەبىنيت سەرجمى پووبەرى لىكەشەكان دەكاتە بەھاي نىكىبەى پووبەرى ناۋچەكە، ھەرچەند ژمارەى لىكەشەكان زىادىكات سەرجمى پووبەرەكانىان لەپووبەرى ناۋچەكە زىاتر نىكىدەبىتەۋە، چۈنكە پووبەرى ئەو ناۋچەيەى كەۋتۋتە نىۋان پوونكرىنەۋەى نەخشەكەو لىكەشەكان تادىت بچوۋك دەبىتەۋە، بۇ دەستكەۋتۋنى پووبەرى ناۋچەكە پىۋىستە ئامانچى سەرجمى پووبەرى لىكەشەكان بدۆزىتەۋە «ئەگەر ھەبۋ»، كاتىك ژمارەى لىكەشەكان بەبەردەۋامى زىادەكات.

دۆزىنەۋە

سەيرى ناۋچەى سنووردراۋ بە پوونكرىنەۋەى نەخشەى $f(x) = x^2$ و ھەردوۋ راستەھىلەى $y = 0$ و $x = 1$ بىكە، دەتوانىت پووبەرى ناۋچەكە نىكىبەيتەۋە بە بەكارھىنانى دوۋ كۆمەلە لىكەشە، يەكەمىان بە پوونكرىنەۋەى نەخشەكە دەردەدراۋە و دوۋەمىان بەدەۋرى پوونكرىنەۋەكى. ۋەك لە وىنەكانى دوۋەم و سىيەمى خوارەۋە دەردەكەۋىت، پووبەرى ھەريەكە لە دوۋ كۆمەلە لىكەشەكە بدۆزەۋە، بەھۋى ئەو ئەنجامە بەھاي نىكرارۋىى پووبەرى ناۋچەى رەنگكراۋ لە وىنەى يەكەم بدۆزەۋە.



له راهیانانی 1 تاكو 9 دیاریبكه، ئایا ده توانیت پرسیاركه به بئ به كارهیانی چه مکی ئامانج شیکاریبكهیت.

1 تهنیک له سهر هیلیکی راست به پیی یاسای $d = 3t^2$ ده جولیت، که t کاته به چرکه و d دوورییه به مەتر، به پیی h ناوهنده خیرایی له نیوان ساتهکانی $t = 10$ و $t = 10 + h$ بدۆزهوه، پاشان خیرایی تهنهکه له وساتهی $t = 10$ بدۆزهوه.

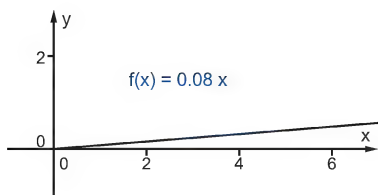
2 لاری لیکهوتی نهخشهی $y = x^2$ له خالی $(3, 9)$ دا بدۆزهوه.

3 پروونکردنهوهی نهخشهی $y = \frac{1}{x}$ له ماوهی $[0, 2]$ بکیشه ماوهکه بۆ 8 بهشی یهکسان دابهشکه، لاکیشهکان به کاربهینه بۆ دهوردانی پرووبهری ناوچهی دیارکراو به چه ماوهی پروونکردنهوهیهکه و تهوهری x و ههردوو راستههیلی $x = 1$ و $x = 2$.

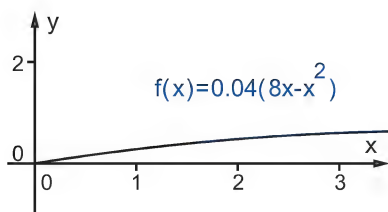
4 ئهوه دوورییه بدۆزهوه که تهنیکی جولاو له ماوهی 15 چرکه دا دهیبریت، ئهگهر خیراییهکهی 7 مهتر بیت له چرکهیهکا.

5 تهنیک به خیراییهکی گۆپاو به پیی کات دهگۆرێ به پرسی $v(t) = 5 + 7 \cos t$ ، کاته به چرکه و $v(t)$ خیرایی تهنهکهیه به مهتر له چرکه دا، ئهوه دوورییهی تهنهکه دهیبریت له ماوهی 15 چرکه دا بدۆزهوه.

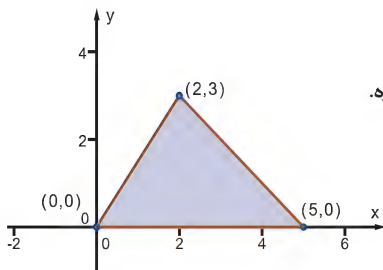
6 خالیک له سهر پروونکردنهوهی نهخشهی $f(x) = 0.08x$ دهجولیت که x به رهو پیشچوونی ئاسویی خالهکهیه، $f(x)$ به رزییهکهی به رامبهری دهنوینیت. تیکرای گۆپانی به رزی خالهکه له $x = 2$ بدۆزهوه.



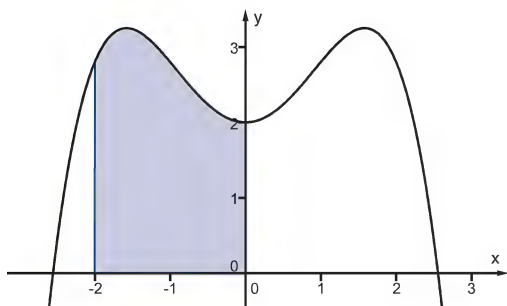
7 خالیک له سهر پروونکردنهوهی نهخشهی $f(x) = 0.04(8x - x^2)$ دهجولیت که x به رهو پیشچوونی ئاسویی خالهکه دهنوینیت، $f(x)$ به رزییهکهی به رامبهری دهنوینیت تیکرای گۆپانی به رزی خالهکه له $x = 2$ بدۆزهوه.



8 بههای نزیکراوهی پرووبهری ناوچهی سیبه رکرارهکه بدۆزهوه.



9 به‌های نزیک‌راوه‌یی پووبه‌ری ناوچه سیب‌ه‌رک‌راوه‌که بدۆزه‌وه.



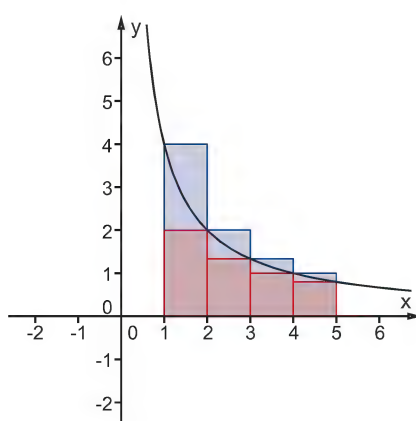
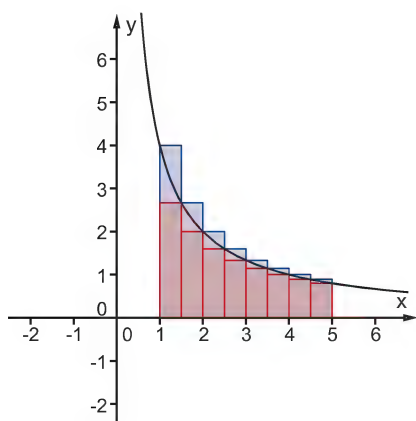
10 نه‌خشه‌ی $f(x) = 4x - x^2$ و خالی $P(1, 3)$ که ده‌که‌وئته سهر پوونکردنه‌وه‌که‌ی به‌کاربه‌ئنه.

- ا) وئنه‌ی پوونکردنه‌وه‌ی نه‌خشه‌ی f و بره‌ره‌کانی بکئشه که به‌خالی P و خالی $Q(x, f(x))$ دا ده‌روات. کاتیک x به‌هایه‌کانی 2, 1.5, 0.5 یه‌که له‌دوای یه‌که وهرده‌گرئت.
- ب) لاری هه‌ریه‌که له سئ بره‌ره‌که بدۆزه‌وه.
- ج) نه‌جامه‌کانی پرسپاری ب به‌کاربه‌ئنه بۆ خه‌ملاندنی لاری لئکه‌وتی پوونکردنه‌وه‌ی نه‌خشه‌که له‌خالی P دا. باسبکه چۆن ده‌توانیت به‌های لاری لئکه‌وته‌که له‌به‌ها راستیه‌که‌ی نزیک و نزیک‌تر بکه‌یته‌وه.

11 نه‌خشه‌ی $f(x) = \sqrt{x}$ و خالی $p(4, 2)$ که ده‌که‌وئته سهر پوونکردنه‌وه‌که‌ی به‌کاربه‌ئنه.

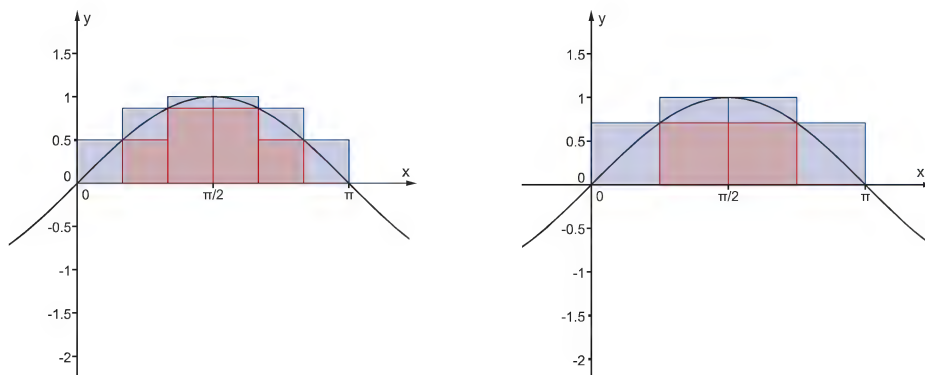
- ا) وئنه‌ی پوونکردنه‌وه‌ی نه‌خشه‌ی f و بره‌ره‌کانی بکئشه که به‌خالی P و خالی $Q(x, f(x))$ دا ده‌روات که x به‌هایه‌کانی 1, 3, 5 یه‌که له‌دوای یه‌که وهرده‌گرئت.
- ب) لاری هه‌ریه‌که له بره‌ره‌کانی بدۆزه‌وه.
- ج) نه‌جامه‌کانی پرسپاری ب به‌کاربه‌ئنه بۆ خه‌ملاندنی لاری لئکه‌وتی پوونکردنه‌وه‌ی نه‌خشه‌که له‌خالی P دا. باسبکه چۆن ده‌توانیت به‌های لاری لئکه‌وته‌که له‌به‌ها راستیه‌که‌ی نزیک و نزیک‌تر بکه‌یته‌وه.

12 ا) لاکئشه‌کان له‌هه‌ر وئنه‌یه‌که به‌کاربه‌ئنه بۆ دۆزینه‌وه‌ی به‌های نزیک‌راوه‌یی پووبه‌ری ناوچه‌ی سنووردراو به پوونکردنه‌وه‌ی نه‌خشه‌ی $f(x) = \frac{4}{x}$ و راسته‌هیله‌کانی $y = 0$ و $x = 1$ و $x = 5$.

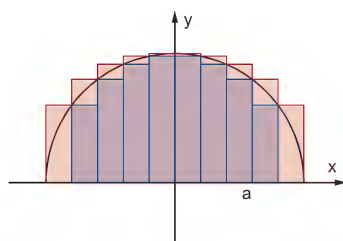


- ب) پوونبکه‌وه چۆن ده‌توانیت له‌و کرداره به‌رده‌وام بئت بۆ ده‌ستکه‌وتنی به‌های پووبه‌ری ناوچه‌که که له به‌ها راسته‌قینه‌که‌ی زیاتر و زیاتر نزیک‌ده‌بئته‌وه.

13 **ا** لاڭښه ګان له هەر وینځه یه به کاربښنه بڼه دوزینه وهی بهای نږیکراوهی پوویه ناپه سڼووردراو به پوونکردنه وهی نه خشی $f(x) = \sin x$ و راسته هیله ګانی $y = 0$ و $x = 0$ و $x = \pi$.



ب پوونیکه وه چوڼ ده توانیت له و کرداره به دهوام بیت بڼه دهستګه وتنی بهای پوویه ناپه که له بهای راستیه که زیاتر و زیاتر نږیکه بیت وه.

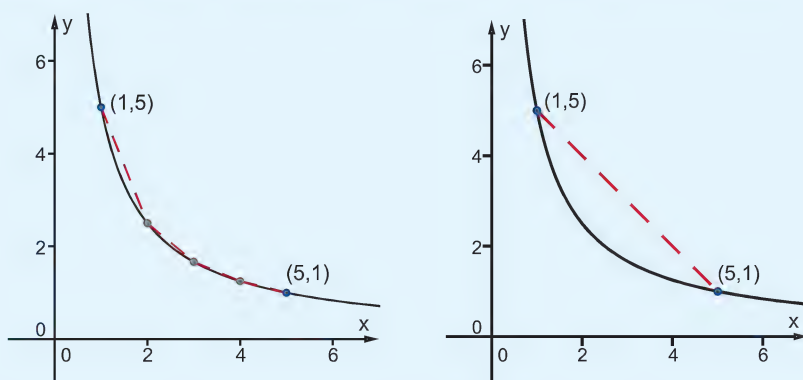


14 **ا** لاڭښه ګان به کاربښنه بڼه دوزینه وهی بهای نږیکراوهی پوویه نیوه بازنه یه تیره که $2a$ بیت. چی ده کهیت بڼه دهستګه وتنی بهای نږیک و نږیکتر له پوویه نیوه بازنه که؟

درباره ی چمکه ګان

15 **ا** پوونکردنه وهی نه خشی $f(x) = \frac{5}{x}$ له نیوان دوو خالی $(1, 5)$ و $(5, 1)$ به کاربښنه.

ا بهای نږیکراوهی دریژی «که وانه ی» چه ماوهی پوونکردنه وهی نیوان دوو خاله که بدوژوه، به هه ژمارکردن دوری نیوان دوولای که وانه که، هه روه که له وینځه یه کهم دهرده که ویت؟



ب بهای نږیکراوهی نوی بڼه دریژی که وانه ی پوونکردنه وه که بدوژوه، به دوزینه وهی سهرجه می دریژی چوار پارچه راسته هیله که، وه که له وینځه ی دوهم دهرده که ویت.

ج پوونیکه وه، چوڼ ده توانیت له سهر ته و کرداره به دهوام بیت بڼه دهستګه وتنی بهای نږیکراوه ګانی دریژی که وانه ی پوونکردنه وه که که زور نږیک بیت له دریژی به راسته قینه که ی.

دۆزینه‌وه‌ی ئامانجه‌كان به‌پروونكردنه‌وه‌ی و ژماره‌ی

Finding Limits Graphically and Numerically

دەروازەیه‌ك بۆ ئامانجه‌كان

وادابنی وێنه‌ی پروونكردنه‌وه‌ی نه‌خشه‌ی

$$f(x) = \frac{x^3 - 1}{x - 1} : x \neq 1 \quad \text{ده‌كیشین كه.}$$

ده‌توانیت وێنه‌ی پروونكردنه‌وه‌ی ئه‌و نه‌خشه‌ به‌چه‌نده‌ها خاڵ جگه‌له $x = 1$ بكیشیت، له‌لایه‌کی تر وێنه‌كه‌ له $x = 1$ پروون نییه‌ چۆن ده‌بێت. بۆ ئه‌وه‌ی بپرووکه‌یه‌كت له‌لا دروستبێت له‌ چۆنیه‌تی سیفته‌ی نه‌خشه‌ی f له‌ هاوسه‌ی $x = 1$ ، ده‌توانیت دوو كۆمه‌له‌ به‌ها بۆ گۆرانی x به‌كاربه‌ێنیت، كۆمه‌له‌ی یه‌كهم له‌و به‌هایانه‌ پێكدێت كه‌ زیاترو زیاتر له‌لای چه‌پ له‌ 1 نزیكه‌بنه‌وه‌ و كۆمه‌له‌ی دووهم له‌و به‌هایانه‌ پێكدێت كه‌ زیاتر و زیاتر له‌لای راست له‌ 1 نزیكه‌بنه‌وه‌.

ئامانجه‌كان

- به‌های ئامانج ده‌خه‌ملێنیت به‌ به‌كارهێنانی پێگای وێنه‌ی پروونكردنه‌وه‌ی یان ژماره‌ی.
- ئه‌و باره‌ جیاوازانە فێر ده‌بێت، كه‌ ئامانجی نییه‌

زاراوه‌كان

Vocabulary

ئامانج Limit

به‌هایه‌كانی x له‌لای چه‌پ له‌ 1 نزیكه‌بنه‌وه‌

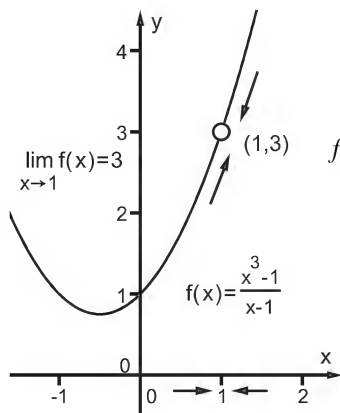
به‌هایه‌كانی x له‌لای راست له‌ 1 نزیكه‌بنه‌وه‌

x	0.75	0.9	0.99	0.999	1	1.001	1.01	1.1	1.25
$f(x)$	2.313	2.710	2.970	2.997	?	3.003	3.030	3.310	3.813

به‌هایه‌كانی $f(x)$ له‌لای چه‌پ له‌ 3 نزیكه‌بنه‌وه‌

به‌هایه‌كانی $f(x)$ له‌لای راست له‌ 3 نزیكه‌بنه‌وه‌

تێبیننه‌ ئه‌وه‌ بکه‌ هه‌رچه‌نده‌ x به‌های $x = 1$ وهرناگریت، به‌لام ده‌توانریت به‌هایه‌كه‌ له‌ 1 زیاترو زیاتر نزیكه‌بکریته‌وه‌ له‌مه‌وه‌ ده‌رده‌چێت به‌هایه‌كانی $f(x)$ زیاترو زیاتر له‌ 3 نزیكه‌بێته‌وه‌ ئه‌مه‌ به‌ نووسین به‌م شێوه‌یه‌ ده‌رده‌برین.



$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 3 \quad \text{بخوێنه‌وه: ئامانجی } f(x) \text{ كاتێك } x \text{ له } 1 \text{ نزیكه‌بێته‌وه‌ یه‌كسانه‌ به } 3$$

ئهم شیکردنه‌وه‌ی پیشو ده‌مانگه‌ینێته‌ پێناسه‌ی ئامانج. به‌های $f(x)$ زیاترو زیاتر له‌ ژماره‌ی L نزیكه‌بێته‌وه‌ كاتێك x زیاترو زیاتر له‌ ژماره‌ی دیاریکراوی c له‌هه‌ردوو لای نزیكه‌بێته‌وه‌، ئه‌وا L ده‌کاته‌ ئامانجی $f(x)$ کاتێك x له‌ c نزیكه‌بێته‌وه‌، ئه‌مه‌ به‌ نووسین به‌م شێوه‌یه‌ ده‌رده‌برین: $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L$

دۆزىنەۋە

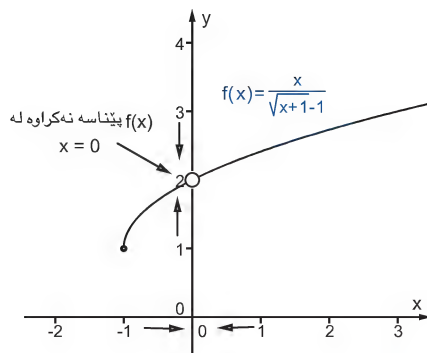
لە نموونەكانى پېشوو پروندەبېتەۋە چۆن ئامانجىكى ديارىكراۋ دەخەملېنىت، بە ژمارىيى بە دروستكردى خىشتەى بەھايەكان، و بەروونكرندەۋەيى بەكېشانى وېنەى پروونكرندەۋەى نەخشەكە خىشتەى بەھايەكان بۆ خەملاندنى ئەو ئامانجە بەكاربېتەنە.

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 2}$$

x	1.75	1.9	1.99	1.999	2	2.001	2.01	2.1	2.25
$f(x)$?	?	?	?	?	?	?	?	?

نمونه 1

خەملاندنى ئامانج بە ژمارىيى



بەھايەكانى نەخشەى $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x+1}-1}$ ھەژمارىكە كاتىك x چەند بەھايەكى نىك لە $x = 0$ ۋەردەگرىت ئەۋەى دەستدەكەۋىت بەكاربېتەنە بۆ پېدانى بەھايى نىكراۋەى ئامانجى $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{x+1}-1}$.

شىكار

لەم خىشتەى خوارۋە بەھايەكانى $f(x)$ ۋەردەكەۋىت كاتىك x چەند بەھايەكى نىك لە $x = 0$ ۋەردەگرىت.

بەھايەكانى x لەلای چەپ لە 0 نىكەبەنەۋە

بەھايەكانى x لەلای راست لە 0 نىكەبەنەۋە

x	-0.01	-0.001	-0.0001	0	0.0001	0.001	0.01
$f(x)$	1.99499	1.99950	1.99995	?	2.00005	2.00050	2.00499

بەھايەكانى $f(x)$ لەلای چەپ لە 2 نىكەبەنەۋە.

بەھايەكانى $f(x)$ لەلای راست لە 2 نىكەبەنەۋە.

لە ئەنجامەكانى خىشتەكە ۋەردەكەۋىت دەتوانرىت 2 بەھايى نىكراۋەيى ئامانجى نەخشەى f دابىرىت كاتىك x لە 0 نىكەبېتەۋە، وېنە پروونكرندەۋەكەش ئەو ۋەردەنجامە دوۋپاتەدەكەۋە لە نموونەى 1 تېبىنى بىكە نەخشەكە پېناسەنەكراۋە لە $x = 0$ ، سەرەراى ئەۋەش ۋەردەكەۋىت. نەخشەكە لە ئامانج نىكەبېتەۋە كاتىك x لە 0 نىكەبېتەۋە، زۆرچار ئەمە پروودەدات، بۆيە گرنگە ئاگادارىين كە نەخشەكە پېناسەكرابىت يان نا لە $x = c$ كارناكاتە سەر ھەبوونى ئامانجى $f(x)$ كاتىك x لە c نىكەبېتەۋە.

1. بەھايەكانى نەخشەى $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x+4}-2}$ ھەژمارىكە كاتىك x چەند بەھايەكى نىك لە $x = 0$ ۋەردەگرىت ئەۋەى دەستدەكەۋىت بەكاربېتەنە بۆ پېدانى بەھايى نىكراۋەيى ئامانجى $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{x+4}-2}$.

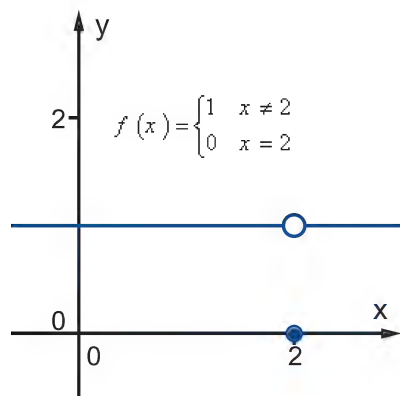


نمونه 2

ئامانجى نەخشەى رېسا پەلدار

ئامانجى نەخشە $f(x) = \begin{cases} 1 & x \neq 2 \\ 0 & x = 2 \end{cases}$ بدۆزەو.

كاتىك x نىكەدەبېتەو 2 .



شىكار

لەبەرئەو $f(x) = 1$ كاتىك x بەھای جىاواز لە 2 وەردەگرېت. لەمەو دەردەچېت ئامانجەكە دەكاتە 1

وەك لەوینەكەى بەرامبەر دەردەكەوېت. دەتوانیت

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 1 \quad \text{بنووسیت}$$

ئەگەر $f(x)$ لە $x = 2$ پېناسەكرابېت وئەگەر $f(2) = 0$ كارناكاتە سەر ھەبوونی ئامانجەكەو بەھایەكەى، ئەگەر بېتو نەخشەكە بەم شېوہى دېت پېناسەكرابوایە.

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \neq 2 \\ 2 & x = 2 \end{cases}$$

ھىچ لە ئامانجەكە نەدەگۆرا.

$$f(x) = \begin{cases} x-1 & x < 0 \\ 0 & x = 0 \\ -x-1 & x > 0 \end{cases} \quad 2.$$



ئامانجى نەخشەكە بدۆزەو كاتىك x لە 0 نىكەدەبېتەو.

تا ئىستا ئامانجەكانت بە ژمارەى و پرونكرەنەوہى دەخەملاند، لەوانەى داھاتوودا رېگای جەبرى فېردەبېت بۆ دۆزىنەوہى ئامانجەكان، ھەولېدە لەماوہى خوئندى جىاكارى و تەواوكارى پەرە بەو سى رېگایە بەدەيت بۆ شىكاركردى پرسیارەكانى ئامانج.

- رېگا ژمارەىيەكان **دروستكردى خشتەى بەھایەكان** بۆ نەخشەكە.
- رېگا پرونكرەنەوہىيەكان **كېشانى وینەى پرونكرەنەوہىيە نەخشەكە.**
- رېگا جەبرىيەكان **بەكارھېنانى جەبر يان ھەژماركردى جىاكارى و تەواوكارى.**

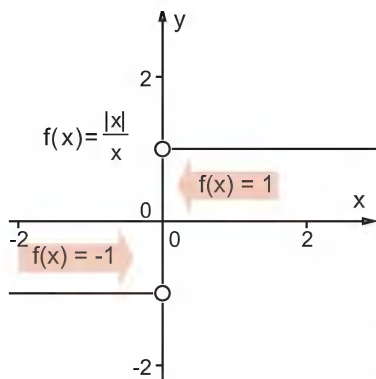
نەبوونی ئامانجەكان

لەم سى نموونەى دېت ئەو بارانە دەردەكەوېت كە ئامانج ھەموو جارېك بوونی نییە.

نمونه 3

کاتیڤ سیفہتی لای چہپ و راستی جیاواز دہبیت

دیاریبکہ ئامانجی $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x}$ بوونی نییہ.



ویئنہی پروونکردنہوہی نہخشہی $f(x) = \frac{|x|}{x}$ بکیشہ. ئهگەر سہیری پروونکردنہوہی شیوہی بہرامبہر بکہیت، دہبینیت کہ $\frac{|x|}{x} = 1$ کاتیڤ $x > 0$ و $\frac{|x|}{x} = -1$ کاتیڤ $x < 0$ ئہمہش ئہوہ دہگہینیت کہ بہہایہکانی $f(x)$ مووجہب دہبن بہہای x لہلای راستی 0 ہرچہندبیت، وسالب دہبن بہہای x لہلای چہپی 0 ہرچہندبیت. بہمہش نزیکبوونہوہی بہہایہکانی $f(x)$ لہہمان بہا ئہستم دہبیت، کاتیڤ x لہلای راست یان لہلای چہپ لہ 0 نزیکدہبیتہوہ. لہوہش دہردہچیت کہ نہخشہکہ ئامانجی نییہ کاتیڤ x لہ 0 نزیکدہبیتہوہ.

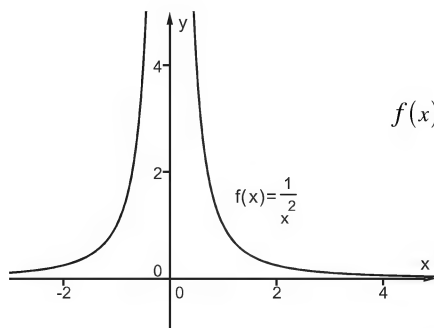
3. پروونیبکہوہ کہ ئامانجی $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ کاتیڤ $f(x) = \begin{cases} x-1 & x < 0 \\ x+1 & x > 0 \end{cases}$ بوونی نییہ.



نمونه 4

سیفہتی بیسنور

دیاریبکہ ئایا $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2}$ بوونی ہئیہ یان نا.



شیکار

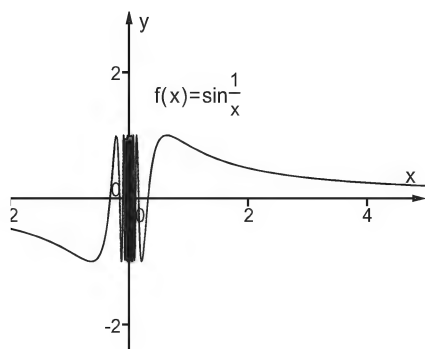
شیوہی بہرامبہر ویئنہ پروونکردنہوہی نہخشہی $f(x) = \frac{1}{x^2}$ پروون دہکاتہوہ، دہبینین بہہای $f(x)$ بیسنور زیاددہکات ہرچہند x لہلای چہپ یان لہلای راست لہ 0 نزیکدہبیتہوہ، ئہمہش ئہوہ دہگہینیت، دہتوانریت بہہای $f(x)$ گہورہ بکریٹ بہپیئہ ئہوہ دہتہویت بہہلبزاردنہی بہہایہک بؤ x نزیک بیت لہ 0.

بؤ نمونہ: دہتوانیت بہہای $f(x)$ گہورہتر بکہین لہ 100 ئہگہر بہہایہک بؤ x کہمیک دورتر لہ $\frac{1}{10}$ لہ 0 ہہلبزیرین، بیگومان ئہگہر $0 < |x| < \frac{1}{10}$ ئہوا $f(x) = \frac{1}{x^2} > 100$ ہہروہا دہتوانیت بہہای $f(x)$ گہورہتر بکہین لہ 1 000 000 ئہگہر بہہایہک بؤ x کہمیک دورتر لہ $\frac{1}{1000}$ لہ 0 ہہلبزیرین چونکہ لہ پیوہندی $0 < |x| < \frac{1}{1000}$ دہردہچیت $f(x) = \frac{1}{x^2} > 1 000 000$ لہ بہرئہوہی $f(x)$ لہ ہیچ ژمارہیہکی دیاریکراوی L نزیک نابیتہوہ، کاتیڤ x نزیکدہبیتہوہ لہ 0 لہ بہرئہوہ ئامانجی نہخشہکہ بوونی نییہ.

4. دیاریبکہ ئایا $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(x-1)^2}$ بوونی ہئیہ یان نا.



له بوونی ئامانجی $\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x}$ بکۆلهوه.



شیکار

له شیوهی بهرامبەر پروونکردنهوهی نهخشهی $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ دهردهکهوئیت دهبنیت بههای $f(x)$ له نیوان 1 و -1 له رهلر دهکات هه رچه ند x له لای راست یان له لای چهپ له 0 نزیکه بیتهوه، بیگومان هه میسه ده توانیت دوو بههای x_1 و x_2 نزیك له 0 بۆ گوڤاوی x هه لیزیریت به پیی ئه وهی دهتهوئیت و پاسادانی $f(x_1) = \sin \frac{1}{x_1} = 1$ و $f(x_2) = \sin \frac{1}{x_2} = -1$ بکات وهك لهم خشتهیهی خوارهوه دهردهکهوئیت.

x	$\frac{2}{\pi}$	$\frac{2}{3\pi}$	$\frac{2}{5\pi}$	$\frac{2}{7\pi}$	$\frac{2}{9\pi}$	$\frac{2}{11\pi}$	$x \rightarrow 0$
$f(x)$	1	-1	1	-1	1	-1	ئامانج بوونی نییه

5. له بوونی ئامانجی $\lim_{x \rightarrow 0} \cos \frac{1}{x}$ بکۆلهوه.



جوړهکانی سیفهتی ناوۀ بۆ نه بوونی ئامانج

1. کاتیك x له لای راست له c نزیکه بیتهوه. به هایهکانی $f(x)$ له ژمارهیهك نزیکه بیتهوه جیاوازه لهو ژمارهیهیهی کاتیك x له لای چهپ له c نزیکه بیتهوه.
2. به هایهکانی $f(x)$ بیسنوور زیادهکهن یان کهمهکهن کاتیك x له c نزیکه بیتهوه.
3. به هایهکانی $f(x)$ له نیوان دوو ژمارهیهی نهگوڤی جیاوازه لهرهلر بکات کاتیك x له c نزیکه بیتهوه.

زۆر نهخشهی تر هه ن سیفهتی نااسایان ههیه کاتیك x له بههای دیاریکراوی c نزیکه بیتهوه، لهو نهخشانهش نهخشهی دیریکلیه Dirichlet function که بهم شیوهیه پیناسهکراوه.

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \in \mathbb{Q} \\ 1 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases} \quad (\mathbb{Q} \text{ کۆمهلهی ژماره پڕتهیهکان})$$

ئهم نهخشهیه ئامانجی نییه کاتیك x لههه بههایهکی راستی c نزیکه بیتهوه بۆیهش له هیچ ژمارهیهکی راستی بهردهوام نییه، لهوانهی داهاتوو بهردهوامی نهخشهکان دهخوینن.

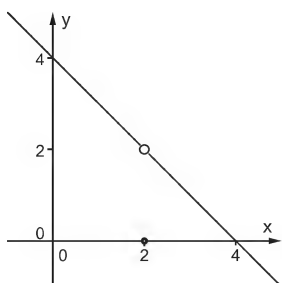


بیئر دیریکلیه 1805-1859

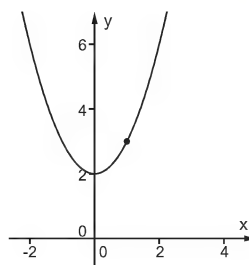
دیریکلیه یهکهه کس بوو
پیناسهی نوئی بۆ نهخشه کرد،
بهپشت بهستن بهو نهخشهیهی
بهناوی ئه نووسراوه.

لە راھینانی 1 تا 6 پوونکردنەوادی نەخشەکە بەکاربەھێنە بۆ دۆزینەوادی ئامانجەکە ئەگەر هەبوو، ئەگەر ئامانجەکە نەبوو ھۆیکەمی پوونبکەو.

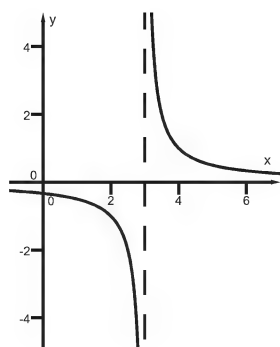
$$f(x) = \begin{cases} 4-x & x \neq 2 \\ 0 & x = 2 \end{cases} \quad \lim_{x \rightarrow 2} f(x) \text{ کاتیك } \quad 2$$



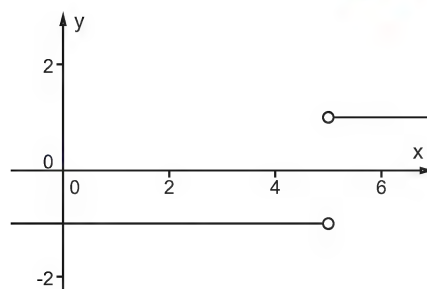
$$\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + 2) \quad 1$$



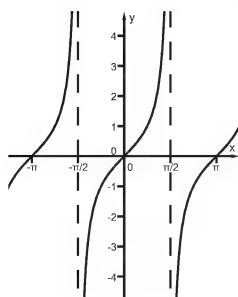
$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{x-3} \quad 4$$



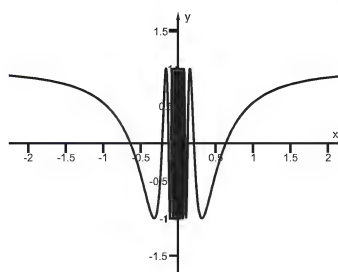
$$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{|x-5|}{x-5} \quad 3$$



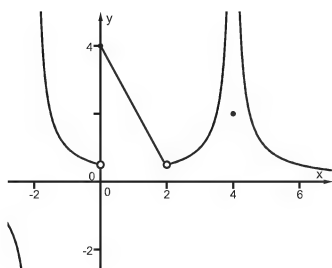
$$\lim_{x \rightarrow \pi/2} \tan x \quad 6$$



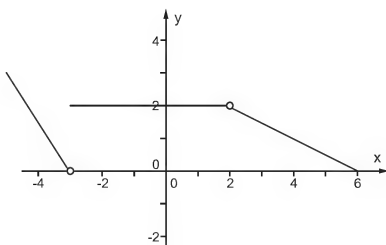
$$\lim_{x \rightarrow 0} \cos \frac{1}{x} \quad 5$$



7 **وېنەى پروونکردنەوہى بەرامبەر بەکاربھېنە بۇ وەلامدانەوہ. ئەگەر ئامانجى ھەبېت، بەھايەكى نىزىکراوہى دەستىشانىكە و ئەگەر نەيىو وھيەكەى پروونىكەوہ.**



$\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$	ب	$f(-2)$	ا
$\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$	د	$f(0)$	ج
$\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$	و	$f(2)$	هـ
$\lim_{x \rightarrow 4} f(x)$	ز	$f(4)$	ز



8 **وېنەى پروونکردنەوہى نەخشەى f بەکاربھېنە بۇ ديارىکردنى بەھايەکانى c كە وادەكات $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$ ھەبېت.**

9 **وېنەى پروونکردنەوہى نەخشەى $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \leq 2 \\ 8 - 2x & 2 < x < 4 \\ 4 & x \geq 4 \end{cases}$ بکېشه و بەکاربھېنە بۇ ديارىکردنى بەھايە c كاتېك $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$ ھەبېت.**

10 **بەھايە نىزىكەكان بۇ $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ بدۆزەوہ كاتېك $f(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}}$ بە ھەژمارکردنى بەھايەکانى نەخشەكە كاتېك x بەھايە نىزىكەكان لە 0 وەردەگرېت وېنەيەكى پروونکردنەوہى نىزىكەى بۇ نەخشەكە بکېشه.**

پاست يان ھەلە؟ لە راھيتانەکانى 11 تاكو 14 ديارىكە ئەگەر پستەكە راستە ھويەكەى لىكبدەوہ يان ھەلەيە بە دژە نمونەيەك بيسەلمېنە.

11 **ئەگەر نەخشەى f پېناسەنەكرايېت لە $x = c$ ئەوا $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$ بوونى نىيە.**

12 **ئەگەر $f(c) = L$ ئەوا $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L$.**

13 **ئەگەر $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L$ ئەوا $f(c) = L$.**

14 **نەخشەى $f(x) = \sqrt{x}$ بەکاربھېنە.**

ا **ئايە راستە؟ $\lim_{x \rightarrow 0.25} \sqrt{x} = 0.5$ ، وەلامەكەت پروونىكەوہ.**

ب **ئايە راستە؟ $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x} = 0$ ، وەلامەكەت پروونىكەوہ.**

دەربارەى چەمكەكان

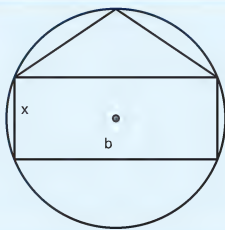
15 باسكى بەپېز بنوسە كە $\lim_{x \rightarrow 8} f(x) = 25$ چى دەگەينىت.

16 ئەگەر $f(2) = 4$ ئايا ھېچ دەرنەجامىكت لەبارەى ئامانجى $f(x)$ دەستدەكەوئىت كاتىك x لە 2 نىكدەبىتەوہ؟ وەلامەكەت پوونبەوہ.

17 ئەگەر ئامانجى $f(x)$ بكاتە 4 كاتىك x لە 2 نىكدەبىتەوہ، ئايا ھېچ دەرنەجامىكت لەبارەى $f(2)$ دەستدەكەوئىت؟ وەلامەكەت پوونبەوہ.

18 3 جوړ لە سيفەتەكانى نەخشە دياربە كەدەبنە ھۆى نەبوونى ئامانج. وئەنى پوونكردنەوہى نەخشەيەك بو ھەر سيفەتەك بكيئشە.

بەرەنگارى



19 لەوئەكە لاكئشەيەك و سىگوشەيەكى دوولايەكسان دەردەكەوئىت كە بە بازنەيەك نيوەتيرەكەى 1 بىت دەورەدراوہ. بەھای x چەندە؟ كەوادەكات پووبەرى لاكئشەكەو سىگوشەكە يەكسان بن.

ههژمارکردنی ئامانجهكان

Finding Limits

3-2

ههژمارکردنی ئامانجهكان

ئامانجهكان

لهوانهكهی پيشوو فيربوویت چۆن به پوونکردنهوهی وژمارهیی بههای نزيكهیی ئامانجی نهخشهیهك بدۆزیهوه (لهباری ههبوونیدا) لهم وانیهدا فيردهبیت چۆن ئامانجی نهخشهیهك به بهكارهينانی چهند پيسايهك وهنديك له ئامانجه ناسراوهكان بدۆزیتوه، ههروهها سەلمینراوی دوو مەرج فيردهبیت، وچۆن له ههژمارکردنی ئامانجهكان بهکاریدههينیت.

- به بهكارهينانی پيسايهكان ئامانجی نهخشه ههژماردهكات.
- پيگايهك بۆ ههژمارکردنی ئامانج دهبۆزیتوه و بهکاریدههينیت.
- ئامانجی بریک به نووسینی به سادەترین شێوه ههژماردهكات.
- به بهكارهينانی سەلمینراوی دوو مەرج ئامانج ههژماردهكات.

ههنديك له پيساكانی ههژمارکردنی ئامانجهكان

پيسای نهخشهیی نهگۆر: ئهگەر $f(x) = a$ كه a ژمارهیهکی راستی نهگۆرپه ئهوا $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = a$.

پيسای نهخشهیی هيلی بنهپهتی: ئهگەر $f(x) = x$ ئهوا $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = c$.

پيسای نهخشهیی هين: ئهگەر $f(x) = x^n$ ئهوا $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = c^n$.

پيسای نهخشهیی پهگی دووجا: ئهگەر $f(x) = \sqrt{x}$ ئهوا $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \sqrt{c}$ کاتیک $c > 0$.

پيسای ليکدان له ژمارهیهکی نهگۆر: ئهگەر $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$ ههبيت ئهوا $\lim_{x \rightarrow c} [af(x)] = a \lim_{x \rightarrow c} f(x)$ کاتیک a ژمارهیهکی راستی بييت.

پيسای سهرحهه: ئهگەر f و g دوو نهخشهبن، و کاتیک a ژمارهیهکی راستی بييت ئهگەر ئامانجی

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) \text{ و } \lim_{x \rightarrow c} g(x) \text{ ههبيت، ئهوا}$$

$$\lim_{x \rightarrow c} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \rightarrow c} f(x) + \lim_{x \rightarrow c} g(x)$$

پيسای جياوازی: ئهگەر f و g دوو نهخشهبن، و ئهگەر ئامانجی $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow c} g(x)$ ههبيت، ئهوا

$$\lim_{x \rightarrow c} [f(x) - g(x)] = \lim_{x \rightarrow c} f(x) - \lim_{x \rightarrow c} g(x)$$

پيسای ليکدان: ئهگەر f و g دوو نهخشهبن، و ئهگەر ئامانجی $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow c} g(x)$ ههبيت، ئهوا

$$\lim_{x \rightarrow c} [f(x)g(x)] = \lim_{x \rightarrow c} f(x) \lim_{x \rightarrow c} g(x)$$

نمونە 1

ئامانجى نەخشە پادەدارەكان

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) \text{ بدۆزەو كاتىك } f(x) = -2x^5 + 3x^2 - 7x + 5$$

شىكار

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} (-2x^5 + 3x^2 - 7x + 5)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} (-2x^5) + \lim_{x \rightarrow 2} (3x^2) + \lim_{x \rightarrow 2} (-7x) + \lim_{x \rightarrow 2} (5) \quad \text{رېساي سەرجهم بەكاربھيئە}$$

$$= -2 \lim_{x \rightarrow 2} (x^5) + 3 \lim_{x \rightarrow 2} (x^2) + (-7) \lim_{x \rightarrow 2} (x) + \lim_{x \rightarrow 2} (5) \quad \text{رېساي لىكدان لە ژمارە بەكاربھيئە}$$

$$= -2 \times 2^5 + 3 \times 2^2 - 7 \times 2 + 5 = -61 \quad \text{رېساي نەخشەى ھېز بەكاربھيئە}$$

$$1. \lim_{x \rightarrow 2} f(x) \text{ بدۆزەو كاتىك } f(x) = 3x^5 - 2x^3 - 4x^2 - 3$$



لە رېسايانى ھەژمارکردنى ئامانجەكان

رېساي ئامانجى نەخشەى پادەدار: ئەگەر $f(x)$ نەخشەىيەكى پادەداريىت ئەوا $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$

رېساي دابەش: ئەگەر f و g دوو نەخشەبن، ئەگەر ئامانجى $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow c} g(x)$ ھەبىت، ئەوا

$$\lim_{x \rightarrow c} g(x) \neq 0 \text{ كاتىك}$$

$$\lim_{x \rightarrow c} \left[\frac{f(x)}{g(x)} \right] = \frac{\lim_{x \rightarrow c} f(x)}{\lim_{x \rightarrow c} g(x)} \quad \text{ئەوا:}$$

نمونە 2

ئامانجى نەخشەى رېژەيى

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) \text{ بدۆزەو كاتىك } f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 3} \text{ نەخشەىيەكى رېژەيىيە.}$$

شىكار

بە بەكارھيئەنى رېساي دابەش دەتوانىت بنوسىت.

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 1}{x - 3} = \frac{\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 1)}{\lim_{x \rightarrow 2} (x - 3)} = \frac{2^2 - 1}{2 - 3} = -3$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 2} f(x) \text{ بدۆزەو كاتىك } f(x) = \frac{x+2}{x-1} \text{ نەخشەىيەكى رېژەيىيە.}$$



لەكاتى دۆزىنەوئى ئامانجىكى ديارىكراو خۆت بەرامبەر بارىكى ناديارى $\frac{0}{0}$ دەبىنيەو زۆرجار ئەمە

لە دۆزىنەوئى نەخشە رېژەيىيەكان پوودەدات. لە نمونەى دىت دەبىنىت چۆن ناديارى بە رېگاي

جەبرى لادەبەيت وئامانج دەدۆزىتەو، لەبەشەكانى داھاتوو بۆ ئەم پرسىارە دەگەرپىيەو

تارپىگايەكى كارا بۆ شىكارکردنى ئەم جۆرە پرسىارانە فيربىت.

نمونه 3

باری ناديار

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} \text{ بدۆزهوه.}$$

شيكار

جيبهجيكردى ريساي نهخشهي پيژهي دهبيته باريك لهبارهكانى ناديار.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \frac{\lim_{x \rightarrow 1} x^2 - 1}{\lim_{x \rightarrow 1} x - 1} = \frac{0}{0}$$

بۆ لادانى نادياركه $\frac{x^2 - 1}{x - 1} = x + 1$ بهكاربهينه كاتيک $x \neq 1$ لهمهش دهردهچيٲ.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x + 1) = 2$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1} \text{ بدۆزهوه.}$$



نمونه 4

باری ناديار

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+6} - 3}{x - 3} \text{ بدۆزهوه.}$$

شيكار

جيبهجيكردى ريساي نهخشهي پيژهي دهبيته باريك لهبارهكانى ناديار.

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+6} - 3}{x - 3} = \frac{\lim_{x \rightarrow 3} \sqrt{x+6} - 3}{\lim_{x \rightarrow 3} x - 3} = \frac{0}{0}$$

بۆ لادانى ناديار سهرهو ژيره له ئاوهلى $\sqrt{x+6} + 3$ بده، ئهمهت دهستدهكهويٲ.

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+6} - 3}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(\sqrt{x+6} - 3)(\sqrt{x+6} + 3)}{(x - 3)(\sqrt{x+6} + 3)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\cancel{x-3}}{(\cancel{x-3})(\sqrt{x+6} + 3)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{\sqrt{x+6} + 3} = \frac{1}{6}$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x-1} - 2}{x - 5} \text{ بدۆزهوه.}$$



له ريساكانى ههژماركردى ئامانجهكان

ريساي ئامانجى نهخشهي ناويته: ئهگهر f و g دوو نهخشهبن، ئهگهر ئامانجى $\lim_{x \rightarrow c} g(x) = L$ و

$\lim_{x \rightarrow L} f(x)$ ههبيٲ، ئهوا

$$\lim_{x \rightarrow c} [f(g(x))] = f\left(\lim_{x \rightarrow c} g(x)\right) = f(L)$$

نمونه 5

ئامانجى نەخشەى ئاويٽە

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \sqrt{x^2 + 4} \text{ بۆزۈۋە كاتىك } f(x) = \sqrt{x^2 + 4}$$

شىكار

$f(x)$ نەخشەىكى ئاويٽەىە لە دوو نەخشەى $u(x) = \sqrt{x}$ و $v(x) = x^2 + 4$ پىكھاتوۋە،

$$\text{واتە } f(x) = \sqrt{x^2 + 4} = \sqrt{v(x)} = u(v(x))$$

$$\text{لەمەش دەردەچىٽ } \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} u(v(x)) = \lim_{x \rightarrow 2} v(x) = v(2) = 8$$

$$\text{لەمەش دەردەچىٽ } \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 8} \sqrt{x} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$5. \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \sqrt{x^3 - 4} \text{ بۆزۈۋە كاتىك } f(x) = \sqrt{x^3 - 4}$$



لە پىساكانى ھەژمارکردنى ئامانجەكان

پىساى نەخشە سىگۆشەىيەكان

$$c \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \quad \lim_{x \rightarrow c} \tan x = \tan c$$

$$\lim_{x \rightarrow c} \cos x = \cos c$$

$$\lim_{x \rightarrow c} \sin x = \sin c$$

نمونه 6

ئامانجى نەخشەىك كەنەخشەى سىگۆشەى لەخودەگىٽ

$$\lim_{x \rightarrow \pi} f(x) = x \cos x \text{ بۆزۈۋە كە } f(x) = x \cos x$$

شىكار

$$\lim_{x \rightarrow \pi} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pi} (x \cos x) = \lim_{x \rightarrow \pi} (x) \lim_{x \rightarrow \pi} (\cos x) = \pi \cos \pi = -\pi$$

$$6. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} f(x) = x \sin x \text{ بۆزۈۋە كاتىك } f(x) = x \sin x$$



لە پىساكانى ھەژمارکردنى ئامانجەكان

$$\lim_{x \rightarrow c} e^x = e^c \text{ تۈانى سىروشتى}$$

$$c > 0 \quad \lim_{x \rightarrow c} \ln x = \ln c \text{ لۆگارىتمى سىروشتى؛}$$

نمونه 7

ئامانجى نەخشەى تۈانى

$$\lim_{x \rightarrow \pi} f(x) = 3e^{\sin x} \text{ بۆزۈۋە كاتىك } f(x) = 3e^{\sin x}$$

شىكار

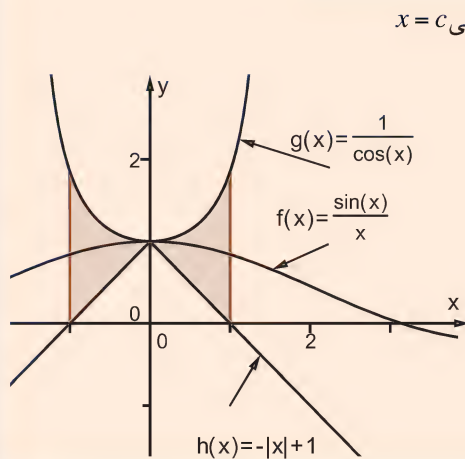
$$\lim_{x \rightarrow \pi} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pi} (3e^{\sin x}) = \lim_{x \rightarrow \pi} (3) \lim_{x \rightarrow \pi} (e^{\sin x}) = 3e^{\lim_{x \rightarrow \pi} \sin x} = 3e^{\sin \pi} = 3e^0 = 3$$

7. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ بدۆزەوه کاتیڭ $f(x) = 3\ln(x+1)$.



له وانهیه له هەندیک باردا ئاسان نەبێت، ئامانجی نەخشەیهک راستەوخۆ بدۆزیتەوه، سەلمینراوی دوو مەرج لەم بارانە یارمەتیت دەدات بۆ دۆزینەوهی ئامانجی داواکراو.

سەلمینراوی 1-2 سەلمینراوی هەردوولەت (الشطرين = السندويج)



ئەگەر $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$ بەهای x لە هاوسییەکانی $x = c$ هەرچەندبێت جگە لە $x = c$ و ئەگەر

$$\lim_{x \rightarrow c} h(x) = L = \lim_{x \rightarrow c} g(x)$$

ئەوا ئامانجی $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$ بوونی هەیە
و $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L$.

سەلمینراوی هەردوولەت بۆ دۆزینەوهی هەندیک ئامانجی گرنگ یارمەتیت دەدات وەک ئەو دوو ئامانجەیی خوارەوه.

هەندیک ئامانجی سیڭۆشەیی

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

بەکارهێنانی سەلمینراوی هەردوولەت

8 نموونە

$\lim_{x \rightarrow 0} x \cos \frac{1}{x}$ بدۆزەوه.

شیکار

بەپشت بەستن بە لاسەنگەیی دوانی $-1 \leq \cos \frac{1}{x} \leq 1$ دەتوانیت ئەمە بنووسیت $-x \leq x \cos \frac{1}{x} \leq x$ ئەگەر $x \geq 0$ و ئەمە بنووسیت $x \cos \frac{1}{x} \geq -x$ ئەگەر $x < 0$.
دەتوانیت سەلمینراوی دوو مەرج و لاسەنگەیی $-x \leq x \cos \frac{1}{x} \leq x$ بەکاربهێنیت بۆ ئەوەی بگەیتە ئەوەی $x \cos \frac{1}{x}$ لە 0 نزیكدەبێتەوه کاتیڭ x لە لای راست لە 0 نزیكدەبێتەوه هەروەها دەتوانیت سەلمینراوی دوو مەرج و لاسەنگەیی $-x \leq x \cos \frac{1}{x} \leq x$ بەکاربهێنیت بۆ ئەوەی بگەیتە ئەوەی $x \cos \frac{1}{x}$ لە 0 نزیكدەبێتەوه کاتیڭ x لە لای چەپ لە 0 نزیكدەبێتەوه، ئەمەش ئەوە دەسەلمینیت $\lim_{x \rightarrow 0} x \cos \frac{1}{x} = 0$.

8. $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x}$ بدۆزەوه.



له راهیتانی 1 تا 3 نامانجی داواکراو بدوژدهوه.

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+1}}{x-4} \quad \text{3} \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2}{x+2} \quad \text{2} \quad \lim_{x \rightarrow 1} (3x^3 - 2x^2 + 4) \quad \text{1}$$

له راهیتانی 4 و 5 دا ئه مانه بدوژدهوه.

$$\lim_{x \rightarrow 1} g(f(x)) \quad \text{ج} \quad \lim_{x \rightarrow 4} g(x) \quad \text{ب} \quad \lim_{x \rightarrow 1} f(x) \quad \text{ا} \quad \text{4} \quad g(x) = x^3 : f(x) = 5 - x$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} g(f(x)) \quad \text{ج} \quad \lim_{x \rightarrow 21} g(x) \quad \text{ب} \quad \lim_{x \rightarrow 4} f(x) \quad \text{ا} \quad \text{5} \quad g(x) = \sqrt[3]{x+6} : f(x) = 2x^2 - 3x + 1$$

له راهیتانی 6 تا 9 نامانجی داواکراو بدوژدهوه.

$$\lim_{x \rightarrow 6} \frac{1}{\cos \frac{\pi x}{6}} \quad \text{9} \quad \lim_{x \rightarrow 3} \tan \frac{\pi x}{4} \quad \text{8} \quad \lim_{x \rightarrow \pi} \cos 3x \quad \text{7} \quad \lim_{x \rightarrow 1} \sin \frac{\pi x}{2} \quad \text{6}$$

له راهیتانی 10 و 11 دا زانیارییه دهستکه وتوو دهکان به کار بهیته بو هه ژمارکردنی نامانجه داواکراو دهک.

$$\lim_{x \rightarrow c} g(x) = 3 : \lim_{x \rightarrow c} f(x) = 2 \quad \text{10}$$

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} \quad \text{د} \quad \lim_{x \rightarrow c} [f(x)g(x)] \quad \text{ج} \quad \lim_{x \rightarrow c} [f(x) + g(x)] \quad \text{ب} \quad \lim_{x \rightarrow c} [5g(x)] \quad \text{ا}$$

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = 27 \quad \text{11}$$

$$\lim_{x \rightarrow c} [f(x)]^{\frac{2}{3}} \quad \text{د} \quad \lim_{x \rightarrow c} [f(x)]^2 \quad \text{ج} \quad \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{18} \quad \text{ب} \quad \lim_{x \rightarrow c} \sqrt[3]{f(x)} \quad \text{ا}$$

له راهیتانی 12 تا 20 نامانجی داواکراو بدوژدهوه.

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x+5} - 3}{x-4} \quad \text{14} \quad \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 5x + 4}{x^2 - 2x - 8} \quad \text{13} \quad \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x-5}{x^2 - 25} \quad \text{12}$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x)^3 - x^3}{\Delta x} \quad \text{17} \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} \quad \text{16} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x+4} - \frac{1}{4}}{x} \quad \text{15}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{3+x} - \frac{1}{x}}{x} \quad \text{20} \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+1} - 2}{x-3} \quad \text{19} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+5} - \sqrt{5}}{x} \quad \text{18}$$

له راهیتانی 21 تا 26 نامانجی داواکراو بدوژدهوه.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x \tan x}{x} \quad \text{23} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3(1 - \cos x)}{x} \quad \text{22} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{5x} \quad \text{21}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\sin 3x} \quad \text{26} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan^2 x}{x} \quad \text{25} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x} \quad \text{24}$$

$$\frac{\sin 2x}{\sin 3x} = \frac{2 \sin 2x}{2x} \times \frac{3x}{3 \sin 3x}$$

له دوو راهینانی 27 و 28 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ بدوژدهوه.

$$f(x) = \frac{4}{x} \quad \boxed{28}$$

$$f(x) = \sqrt{x} \quad \boxed{27}$$

له دوو راهینانی 29 و 30 سهلمینراوی دوو مهرج بهکاربیهینه بو دوزینهوهی $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$.

$$b - |x - a| \leq f(x) \leq b + |x - a|, c = a \quad \boxed{30}$$

$$4 - x^2 \leq f(x) \leq 4 + x^2, c = 0 \quad \boxed{29}$$

ددربارمی چه مکه کان

پوونیکه وه دهسته واژهی «دوو نه خشه هاووپنه جگه له خالیکا» چی دهگهینیت. **31**

نمونهیه که له سهر (دوو نه خشه ی هاووپنه جگه له خالیکا) بهینه وه. **32**

سهلمینراوی دوو مهرج بهشیوازی خوټ پوونیکه وه. **33**

له دوو راهینانی 34 و 35 نه خشه ی لادانی $s(t) = -4.9t^2 + 150$ بهکاربیهینه که شوینی کهوتنی بهردیک له بهرزی 150 m پاش t چرکه دیاریده کات، نهو ئامانجه $\lim_{t \rightarrow a} \frac{s(a) - s(t)}{a - t}$ خیرایی ته نه کهوتووه که دهردهپریت له $t = a$.

خیرایی بهردکه له $t = 5$ بدوژدهوه. **34**

خیرایی بهردکه له کاتی بهرکهوتنی بهزهوی چهنده؟ **35**

دوو نه خشه ی f و g که ئهمانه جیبه جیده کهن بدوژدهوه: ئامانجی $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$ بوونی نییه له کاتیکا ئامانجی $\lim_{x \rightarrow 0} [f(x) + g(x)]$ بوونی هیه. **36**

f و g ئهمانه جیبه جیده کهن: $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = 0$ و $|g(x)| \leq M$ بههای x هرچه ند بیت جگه له $x = c$ کاتیک M ژمارهیه کی موجهی نهگورپیت، سهلمینه $\lim_{x \rightarrow c} f(x)g(x) = 0$. **37**

راست یان ههله؟ له راهینانی 38 تاكو 41 د یاریکه که ئهگهر رسته که راسته هوپه که ی لیکبدهوه یان ههلهیه نهوا بهدژه نمونهیه که بیسهلمینه یان لیکبدهوه.

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad \boxed{39}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x} = 1 \quad \boxed{38}$$

ئهگهر $f(x) = g(x)$ بههای x هرچه ند بیت جگه له $x = 0$ و ئهگهر $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = L$ نهوا $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = L$. **40**

$$f(x) = \begin{cases} 3 & x \leq 2 \\ 0 & x > 2 \end{cases} \quad \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 3 \quad \text{کاتیک} \quad \boxed{41}$$

تاقىکردنەۋەى نىۋەى بەش

لارى لىكەوت

1 نەخشەى $f(x) = 1 - \frac{4}{x}$ وخاللى $A(1, -3)$ كە دەكەۋىتە سەر وىنە پروونكردنەۋەكى بەكاربەيئە.

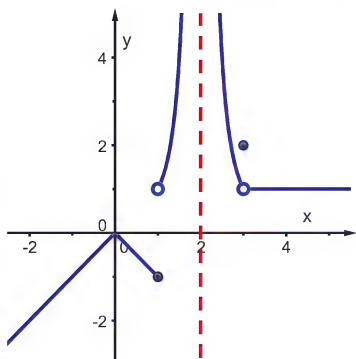
ا وىنەى پروونكردنەۋەى نەخشەى و بېرەكانى d_1 و d_2 و d_3 بكيشە، كە بەخاللى A و خالەكانى $Q(x, f(x))$ دا دەروات كاتىك x بەهاپەكانى $3, 2, 1.5$ يەك لەدواى يەك وەردەگرىت.

ب لارى ھەرىكە لە بېرەكان بدۆزەۋە.

ج پروونىكەۋە ئەو كىردارى لە لىقى ب ئەنجامدا چۆن يارمەتت دەدات بۆ دۆزىنەۋەى بەھاي لارى لىكەۋتى پروونكردنەۋەكە لەخاللى A .

2 لەۋىنەى بەرامبەر وىنەى پروونكردنەۋەى نەخشەى $f(x)$ دەردەكەۋىت، وىنەكە بەكاربەيئە بۆ دۆزىنەۋەى بەھاي ھەرىكە لە $f(1)$ و $f(2)$ و $f(3)$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) \text{ و } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) \text{ و } \lim_{x \rightarrow 2} f(x) \text{ و } \lim_{x \rightarrow 3} f(x)$$



ھەژماركردنى ئامانجەكان

لە راھىتئانى 3 تاكو 8 ئامانجى داواكراو بدۆزەۋە.

4 $\lim_{x \rightarrow -1} 5x^2 + e^{2x}$

3 $\lim_{x \rightarrow 1} 2x^3 - 5x + 2$

6 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 - 8}{2 - x}$

5 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 2x + 1}{|x - 1|}$

8 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x - \sin 2x}{2x - \sin 3x}$

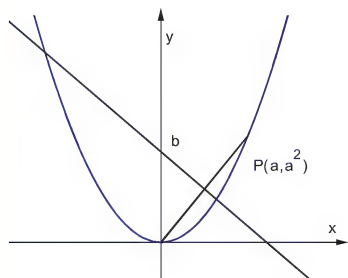
7 $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{1 + \frac{1}{x}}{\frac{x}{x+1}}$

سەلمىتراۋى دوو مەرج

9 سەلمىتراۋى دوو مەرج بەكاربەيئە بۆ دۆزىنەۋەى $\lim_{x \rightarrow 0} |x| \sin \frac{1}{x^2}$

كەۋتنى سەربەست

10 نەخشەى $d(t) = -4.9t^2 + 60$ نمونەيەكە بۆ دىيارىكردنى شوئىنى كەۋتنى بەردىك لە بەرزى 60 مەتر پاش t چركە لەكەۋتنى. ئەم ئامانجە $\lim_{t \rightarrow a} \frac{d(t) - d(a)}{t - a}$ خىرايى بەردەكە لە $t = a$ دەردەبىرئ.



ا خىرايى بەردەكە پاش يەك چركە لەكەۋتنى بدۆزەۋە.

ب خىرايى بەردەكە لەكاتى بەركەۋتنى بەزەۋىدا بدۆزەۋە.

11 نەخشەى $a > 0$ خاللىكە لەسەر وىنەى پروونكردنەۋەى $P(a, a^2)$

نەخشەى بېرگە ھاۋتاي $f(x) = x^2$ ئەگەر b يەكتىرپىنى

ئەستۈنى بىت بۆ تەۋەرى ئەو پارچە راستەھىلەى خاللى P بەخاللى بنەرەت دەگەينىت، ئەوا ئامانجى b كاتىك P لەخاللى

بنەرەت نىكەدەبىتەۋە بدۆزەۋە.

نەخشە بەردەوامەکان

Continuous Functions

4-2

دۆزینە

ئەگەر توانیت پوونکردنەوی نەخشەیکە بکیشیت بى ئەوی قەلمەكەت لەسەر كاغەز هەلبگریت، هەست بە بەردەوامى نەخشەكە دەكەیت. پوونکردنەوی ئەو نەخشەنى دین بکیشە دیاریبکە نایا هەریەكەیان بەردەوامە یان نا.

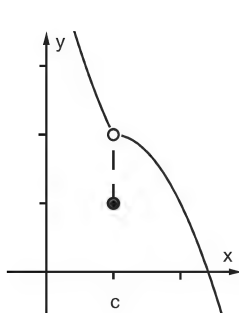
$$f(x) = \begin{cases} 2x-4 & x \leq 0 \\ x+1 & x > 0 \end{cases} \quad 3. \quad f(x) = \frac{1}{x-2} \quad 2. \quad f(x) = x+1 \quad 1.$$

ئامانجەکان

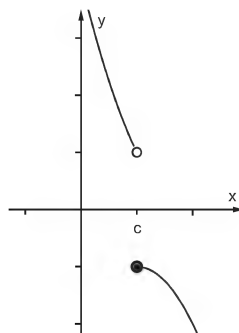
- بەردەوامى نەخشە لە خالێك دەناسیت.
- بەوینەى پوونکردنەویى بەردەوامى نەخشە دیاردەكەت.
- لە سەلمینراوى نۆوانە بەهەیهەكان تێدەگات و بەكار دینیت.

بەردەوامى نەخشە لە خالێكدا

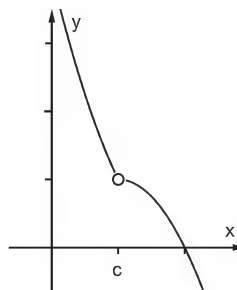
واتای وشەى بەردەوامى لەبیرکاری لەگەڵ واتاكەى لەژیانی پۆژانەدا دەگونجیت، بە نەخشەى f دەوتریت بەردەوامە لە خالێ $x=c$ ئەگەر پوونکردنەویكەى بى پچران بێت بەهۆى كەلێنێك یان دووركەوتنەوێك، لەم سى وینەى خوارەوه سى بار پوونكراوەتەوه نەخشەكان تێیدا لەخالێ c بەردەوام نین لەكاتێكدا لەهەموو خالەكانى تر بەردەوامە.



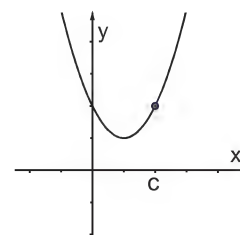
$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) \neq f(c)$$



نەخشەكە پیناسەنەكراوە لە $x=c$ نەخشەكە ئامانجى نییە كاتێك x نزیكدەبێتەوه لە c



نەخشەى پچراو
Discontinuous Function
پچرانێك لا بردنى لەتوانادایە
Removable Discontinuity



سى مەرچ وادەكەت نەخشەكە لە $x=c$ بەردەوام نەبیت

لە وینەكانى سەرەوه دەردەكەوتت كە يەكێك لەم مەرچانەى خوارەوه وادەكەت نەخشەكە لە $x=c$ بەردەوام نەبیت.

1. ئەگەر نەخشەكە لە $x=c$ پیناسەنەكرا بێت.

2. ئەگەر نەخشەكە ئامانجى نەبیت كاتێك x نزیكدەبێتەوه.

3. ئەگەر نەخشەكە ئامانجى هەبیت كاتێك x نزیكدەبێتەوه لە c ، بەلام ئامانجەكە يەكسان نەبیت بە $f(c)$.

لەژێر پۆشنایى ئەم مەرچانە دەتوانین پیناسەى بەردەوامى نەخشە لەخالێ $x=c$ دا بكەین.

پیناسه بهردهوامی

نخشه f له خالی $x = c$ بهردهوام دهیته ئه گهر ئه سى مهرجهى خواره وه هاته دى.

1. نهخشه كه له $x = c$ پیناسه كرابیته.

2. ئامانجى $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$ هه بیته.

3. $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$

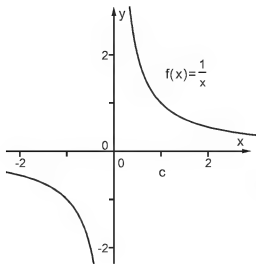
به نهخشه یه كه دهوتریته پچراو له خالی $x = c$ ئه گهر له خاله دا بهردهوام نه بیته، له هه ندیک باردا ده توانیت نهخشه ی پچراو له خالی $x = c$ پیناسه بكیته وه و پچرانه كه ی لهو خاله دا نه هیلیته، له م باردا بهو پچرانه دهوتریته لا بردنى له توانادایه، له كاتیكه دا له باره كانى تر لا بردنى له توانادا نابیته.

نموونه 1 بهردهوامی نهخشه

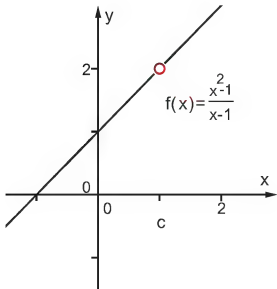
بهردهوامی هه ر نهخشه یه كه تاوتویكه و خاله كانى پچرانیان دیاربكه ئه گهر هه بوو.

$k(x) = \sin x$ **د** $h(x) = \begin{cases} x+1 & x \leq 0 \\ x^2+1 & x > 0 \end{cases}$ **ج** $g(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$ **ب** $f(x) = \frac{1}{x}$ **ا**

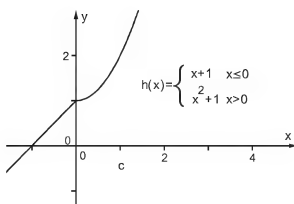
شیکار



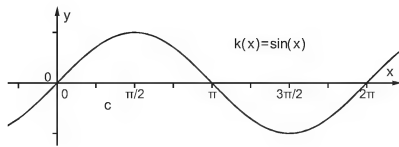
ا بواری نهخشه كه له هه موو ژماره كان جگه له 0 پیکدیته، له مهش ده ده چیت نهخشه كه له خالی $x = 0$ پیناسه نه كراوه، ئه مهش وا ده كات لهو خاله بهردهوام نه بیته، له لایه كى تر پچرانى نهخشه كه لهو خاله دا لا بردنى له توانادا نییه، چونكه ناتوانیت پیناسه ی $f(0)$ بكهیت بۆ ئه وه ی نهخشه كه له $x = 0$ بهردهوام بیته.



ب بواری نهخشه كه له هه موو ژماره كان جگه له 1 پیکدیته، له مهش ده ده چیت كه نهخشه كه له خالی $x = 1$ پیناسه نه كراوه، ئه مهش وا ده كات بهردهوام نه بیته. له لایه كى تر پچرانى نهخشه كه لهو خاله دا لا بردنى له توانادا نییه، چونكه نهخشه كه بۆ نهخشه ی g ده گۆریت كه له $x = 1$ بهردهوامه، ئه گهر پیناسه ی g بكهیت وه ئه وه ی دیت $g(1) = 2$ و $g(x) = f(x)$ كه $x \neq 1$.



ج بواری نهخشه كه له هه موو ژماره راستیه كان پیکدیته، دیاره نهخشه كه له هه ر خالیكى $x = c$ بهردهوامه كه $c \neq 0$ ، له باره ی خالی $x = 0$ نهخشه كه تییدا بهردهوامه، چونكه نهخشه كه له $x = 0$ پیناسه كراوه له لایه ك و له بهر ئه وه ی ئامانجه كه ی ده كاته 1 كاتیكه x له c نزیکه ده بیته وه له لای راست یان لای چه پ. له لایه كى تر و له بهر ئه وه ی $\lim_{x \rightarrow 0} h(x) = 1 = h(0)$ له لای سییه م.



د بوارى نهخشه که له هه موو ژماره راستیه کان پیکډیت، دیاره که نهخشه که له هر خالیکی $x = c$ له خاله کانی بواره کیدا بهر دهوامه نهمهش واده کات نهخشه که بهر دهوام بیت.

1. بهر دهوامی هر نهخشه یه ک تاو توپیکه.



$$h(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & x \leq 0 \\ -x + 1 & x > 0 \end{cases} \quad \text{ع}$$

$$f(x) = \frac{1}{x-1} \quad \text{ا}$$

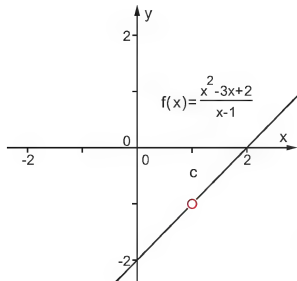
$$k(x) = \cos x \quad \text{د}$$

$$g(x) = \frac{x^3 + 1}{x + 1} \quad \text{ب}$$

لابردنی پچرانی نهخشه له خالیک

نمونه 2

نایا نهخشه $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1}$ له خالی $x = 1$ بهر دهوامه؟ پوونکردنه وه که ی بکیشه و وه لاهمه که ت پوونیکه وه، نهگه نهخشه که پچراو بوو لهو خاله دا، دیاریبکه، نهگه پچرانه که ی لابردنی له توانادایه، لهو باره دا پوونیکه وه چوڼ به پیناسه کردنه وه ی نهخشه که پچرانه که ی لاده بهیت.



شیکار

نهخشه که له خالی $x = 1$ پچراوه چونکه لهو خاله دا پیناسه نه کراوه، پوونکردنه وه که ش نهوه دهرده خات به لام نهو پچرانه لابردنی له توانادایه، چونکه $f(x)$ له -1 نژیکه بیته وه کاتیک x له لای راست و له لای چپ له 1 نژیکه بیته وه، بویه دتوانریت بنووسریت.

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -1$$

بو لابردنی پچرانی نهخشه f له خالی $x = 1$ دووباره پیناسه ی بکه وه بهم شیوه ی خواره وه.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1} & x \neq 1 \\ -1 & x = 1 \end{cases}$$

2. نایا نهخشه $f(x) = \frac{x^2 + x - 2}{x + 2}$ له خالی $x = -2$ بهر دهوامه؟ پوونکردنه وه که ی بکیشه و وه لاهمه که ت پوونیکه وه نهگه نهخشه که لهو خاله دا پچراو بوو، دیاریبکه که نهگه پچرانه که ی لابردنی له توانادایه لهو باره دا پوونیکه وه چوڼ به پیناسه کردنه وه ی نهخشه که پچرانه که ی لاده بهیت.



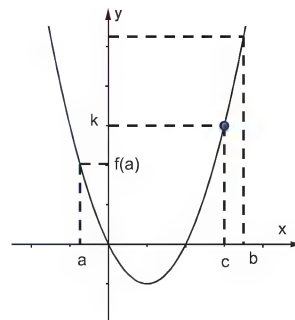
سهمینراوی نیوانه به هایه کان Intermediate Value Theorem

نهگه له گوړانی دریژی مروځ به گوړانی تمه نی وردبیه وه، نهوا ده بینین که دریژی مروځ له راستیدا نهخشه به پیی تمه نه که ی. ههروه ها تیبینی نهوه ش ده که ی نهگه دریژی که سیل 150 cm بیت له تمه نی دوازه سالی دا، 169 cm بیت له تمه نی بیست سالی دا، نهوا دریژی به که ی هه موو نهو به هایانه ی که ده که ویته نیوان 150 و 169 به دریژی پروژه کان و مرگرتوو. ههروه ها تیبینی ده که ی دریژی نهو که سه له 150 cm بو 169 به شیوه ی که ی بهر دهوام زیادی کردوه و دریژی به که ی هیچ پازدانیکی نه کردوه.

لهم تېبېنيانوه دوتوانين بللېن كه دريژي ئهو كه سه نهخشه يه كي بهرده وامه كاتيك ته مه نه كه به هايه كاني نيوان 12 و 20 ودره گريټ و ئهو نهخشه يه هممو به هايه كاني نيوان 150 بو 169 ودره گريټ، نهخشه بهرده وامه كانيش هه مان سيفه تيان هه يه، سه لميټراوي نيوانه به هايه كاني ئهو د دوپا تده كاته وه.

سه لميټراوي 2-2 نيوانه به هايه كاني

ئه گهر نهخشه ي f له نيوان خاله كاني $x = a$ و $x = b$ بهرده وام بيټ، ئه واه هممو به هايه كاني نيوان $f(a)$ و $f(b)$ ودره گريټ، به دهسته وازه يه كي وردتر نه گهر k ژماره يه كي راستي بيټ و بكه ويټه نيوان $f(a)$ و $f(b)$ دوتوانين ژماره ي c له نيوان a و b بدوژيټه وه كه $f(c) = k$ پاسادان دهكات.



ره گه كاني هاوكيشه ي $f(x) = 0$

له گرنگترين چيټه جيكر د نه كاني سه لميټراوي نيوانه به هايه كاني سه لماندني ئه وه ي كه هاوكيشه ي $f(x) = 0$ ره گيكي هه يه دهكه ويټه نيوان دوو ژماره، ئه گهر نهخشه ي f بهرده وام بيټ له نيوان $x = a$ و $x = b$ و ئه گهر $f(a)$ و $f(b)$ نيشانه يان جياوازي بيټ، ئه واه هاوكيشه ي $f(x) = 0$ به لايه ني كه م ره گيكي هه يه دهكه ويټه نيوان a و b .

له بهر ئه وه ي $f(a)$ و $f(b)$ نيشانه يان جياوازه ئه واه 0 دهبيټه نيوانه به هاي نيوان $f(a)$ و $f(b)$ ، به پشت به ستن به سه لميټراوي نيوانه به هايه كاني ژماره يه كي راستي c هه يه دهكه ويټه نيوان a و b كه $f(c) = 0$ پاسادان دهكات.

جيټه جيكر د له سه ر سه لميټراوي نيوانه به هايه كاني

3 نمونه

سه لميټراوي نيوانه به هايه كاني به كار بهيټه بو ئه وه ي سه لميټريت كه هاوكيشه ي $f(x) = 0$ كاتيك $f(x) = x^3 + 2x - 1$ ره گيكي له نيوان 0 و 1 دا هه يه.

شيكار

نهخشه ي f نهخشه يه كي راده داره، هه روه ها بهرده وامه له نيوان $x = 0$ و $x = 1$.

$$\text{له لايه كي تر: } f(0) = 0^3 + 2(0) - 1 = -1$$

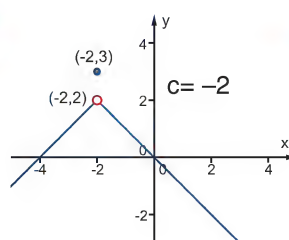
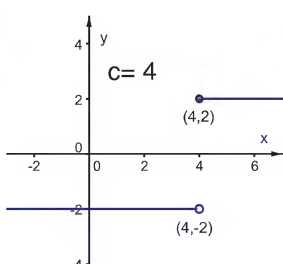
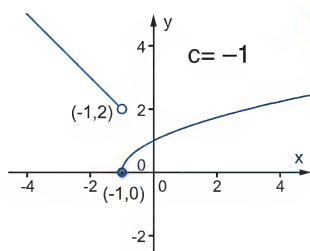
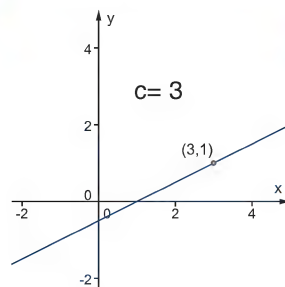
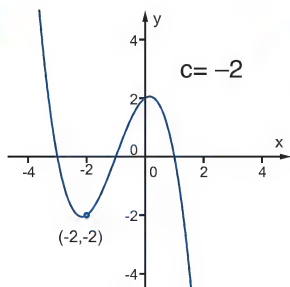
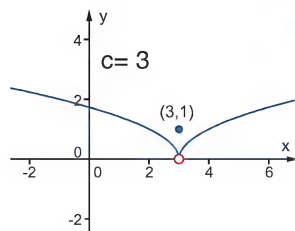
$$f(1) = 1^3 + 2(1) - 1 = 2$$

له بهر ئه وه ي $f(0) < 0$ و $f(1) > 0$ به دوو نيشانه ي جياوازي ئه واه هاوكيشه ي $f(x) = 0$ ره گيكي له نيوان 0 و 1 دا هه يه.

3. سه لميټراوي نيوانه به هايه كاني به كار بهيټه بو ئه وه ي سه لميټريت كه هاوكيشه ي $f(x) = 0$ كاتيك $f(x) = x^4 + 2x^2 - 1$ ره گيكي له نيوان 0 و 1 دا هه يه.



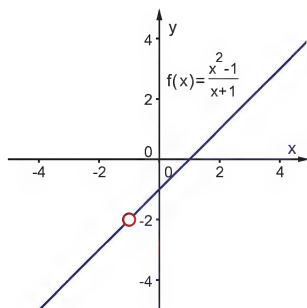
له راهیانانی 1 تا 6 وینه روونکردنه و ده که به کار بهیته بو دۆزینه و دی ئامانجی نه خشه که کاتیگ x له لای راست و له لای جبه له c نزیکه دبیته و ده، $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$ بدۆزه و ده (ئه گهر هه بوو) پاشان بهرده و امی نه خشه که له $x = c$ ناوتویبکه.



له راهیانانی 7 تا 9 بهرده و امی نه خشه که ناوتویبکه.

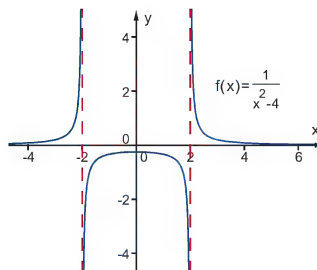
8

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x + 1}$$



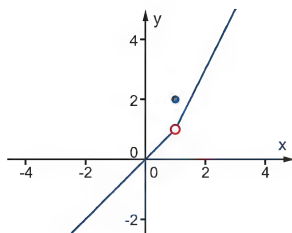
7

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - 4}$$



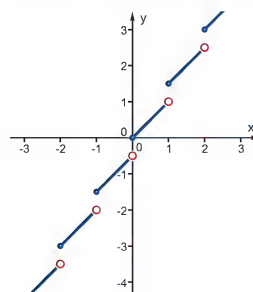
10

$$f(x) = \begin{cases} x & x < 1 \\ 2 & x = 1 \\ 2x - 1 & x > 1 \end{cases}$$



9

ته و او له x زیاتر نه بیته دهنوینیت.



له راهینانی 11 تا 16 به‌هایه‌کانی x که نه‌خشه‌که تییدا پچراوه نه‌گهر هه‌بوو بدۆزه‌وه، و دیاریبکه نه‌گهر پچرانه‌که لابردنی له‌توانادا هه‌یه.

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + 1} \quad \text{12}$$

$$f(x) = x^2 - 2x + 1 \quad \text{11}$$

$$f(x) = \frac{x}{x-1} \quad \text{14}$$

$$f(x) = \frac{x}{x^2 - x} \quad \text{13}$$

$$f(x) = \begin{cases} -2x + 3 & x < 1 \\ x & x \geq 1 \end{cases} \quad \text{16}$$

$$f(x) = \frac{|x-3|}{x-3} \quad \text{15}$$

له راهینانی 17 تا 18 به‌های a یان به‌های b و دیاریبکه تا نه‌خشه‌که خالی پچرانی نه‌بیٔ.

$$f(x) = \begin{cases} 2 & x \leq -1 \\ ax + b & -1 < x < 3 \\ -2 & x \geq 3 \end{cases} \quad \text{18}$$

$$f(x) = \begin{cases} x^3 & x \leq 2 \\ ax^2 & x > 2 \end{cases} \quad \text{17}$$

دەربارەى چەمکەکان

19 جیاوازی نیوان پچرانیك لابردنی له‌توانادا بیٔ یه‌کێکی تر لابردنی له‌توانادا نه‌بیٔ پرونبکه‌وه له‌کاتی باسکردنی جیاوازییه‌که نمونه به‌ینه‌وه بو.

ا) نه‌خشیه‌کی پچراو له $x = 2$ و پچرانه‌که‌ی لابردنی له‌توانادا نه‌بیٔ.

ب) نه‌خشیه‌کی پچراو له $x = -2$ و پچرانه‌که‌ی لابردنی له‌توانادا هه‌بیٔ.

ج) نه‌خشیه‌که هه‌ردوو مه‌رجه‌که‌ی پێشوو یه‌که‌وه تییدا بیٔ.

راسته یان هه‌له؟ له راهینانی 20 تا 23 دیاریبکه که نه‌گهر رسته‌که راسته هویه‌که‌ی لیکنده‌وه یان هه‌له‌یه نه‌وا به‌دژه نمونه‌یه‌که بیسه‌لمیته.

20 نه‌گهر $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L$ و $f(c) = L$ نه‌وا نه‌خشیه‌ی f له $x = c$ به‌رده‌وامه.

21 نه‌گهر $f(x) = g(x)$ کاتیك $x \neq c$ و $f(c) \neq g(c)$ نه‌وا یه‌کێک له دوو نه‌خشه‌که له $x = c$ پچراوه.

22 ده‌کری له نه‌خشیه‌که‌ی ریژه‌یی ژماره‌یه‌کی ناکو٤تا خالی پچرانی هه‌بیٔ.

23 نه‌خشیه‌ی $f(x) = \frac{|x-1|}{x-1}$ به‌رده‌وامه و خالی پچرانی نییه.

24 نه‌خشیه‌ی هیما (الأشارة) بریتییه له نه‌خشیه‌ی

$$s(x) = \begin{cases} -1 & x < 0 \\ 0 & x = 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}$$

25 پروونکردنه‌وه‌ی نه‌خشیه‌ی s بکێشه‌وه نه‌وا ئامانجانیه‌ی دین بدۆزه‌وه نه‌گهر.

$$\lim_{x \rightarrow 0} s(x) \quad \text{ج}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} s(x) \quad \text{ب}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} s(x) \quad \text{ا}$$

ئامانجه بېپايانهكان

Infinite limits

ئامانجه بېپايانهكان

ئامانجهكان

- ئامانجه بېپايانهكان له لاي راست وله لاي چېپ ددوژيتهوه.
- دهرکه ناره ستوونيهكان بۆ نهخشهكان ددوژيتهوه و ويتهكانيان دهكيشيت.

زاراوهكان

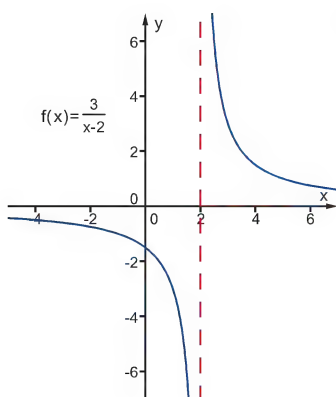
Vocabulary

ئامانجي بېپايان

Infinite Limit

دهرکه ناري ستووني

Vertical Asymtote



لهويته بهرامبر ويته پوونكر د نهخشه $f(x) = \frac{3}{x-2}$ دهردهكويته. دهتوانيت ئه ويته پوونكر د نهخشه و خستهكه خواره بهكار بهيئيت بۆ ئه وهى ببيئيت كه بههايهكانى $f(x)$ بيسنور كه مدهكات كاتيڪ x زياتر و زياتر له لاي چېپ له 2 نزيكه بېتهوه، ئه مه بهم شيويه دهرده برين $f(x)$ له $-\infty$ نزيكه بېتهوه كاتيڪ x له لاي چېپ له 2 نزيكه بېتهوه وبهم شيويه دنوسريته. $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -\infty$ ههروها بههايهكانى $f(x)$ بيسنور زياد دهكات كاتيڪ x زياتر و زياتر له لاي راست له 2 نزيكه بېتهوه ئه مه ش بهم شيويه دهرده برين، $f(x)$ له $+\infty$ نزيكه بېتهوه كاتيڪ x له لاي راست له 2 نزيكه بېتهوه. وبهم شيويه دنوسريته.

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty$$

x له لاي چېپ له 2 نزيكه بېتهوه

x له لاي راست له 2 نزيكه بېتهوه

x	1.5	1.9	1.99	1.999	2	2.001	2.01	2.1	2.5
$f(x)$	-6	-30	-300	-3000	?	3000	300	30	6

بههاى $f(x)$ بيسنور كه مدهكات

بههاى $f(x)$ بيسنور زياد دهكات

به نهخشه f دهوتريت له ئامانجي بېپايان نزيكه بېتهوه كاتيڪ x له بههاى c نزيكه بېتهوه ئه گهر بهها $f(x)$ بيسنور زياد دهكات يان كه مدهكات.

دوژينهوه

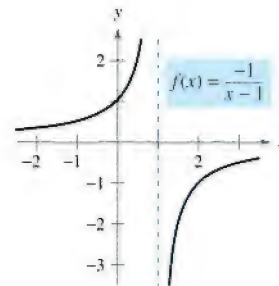
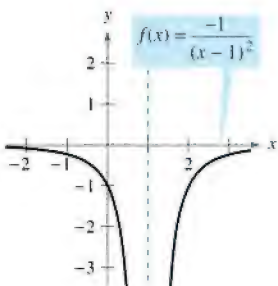
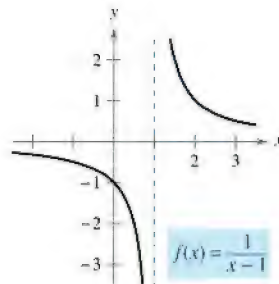
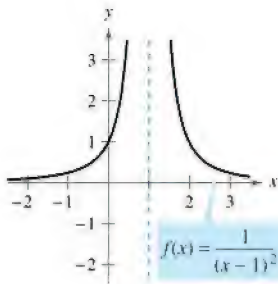
بۆ ههر نهخشه يهك ژماره يهكى راستى c له بواره كهى نه بى دياريكه، ئامانجي $f(x)$ بدوژنهوه كاتيڪ x له لاي راست و له لاي چېپ له c نزيكه بېتهوه.

$$f(x) = \frac{2}{(x-3)^2} \quad 3.$$

$$f(x) = \frac{1}{2-x} \quad 2.$$

$$f(x) = \frac{3}{x-4} \quad 1.$$

ئەم پروونكرندنە وەى خوارە وە بەكاربەيئە بۇ ديارىكردنە ئامانجى ھەر نەخشەيەك كاتىك x لەلەى راست و لەلەى چەپ لە 1 نىزىكدەيئە وە.



شيكار

$$1. \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x-1} = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{x-1} = -\infty$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(x-1)^2} = +\infty$$

ئامانجەكە لە ھەردوولا دەكاتە $+\infty$

$$3. \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{-1}{x-1} = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-1}{x-1} = +\infty$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-1}{(x-1)^2} = -\infty$$

ئامانجەكە لە ھەردوولا دەكاتە $-\infty$

1. ئامانجى ھەر نەخشەيەك بدۆزە كاتىك x لەلەى راست و لەلەى چەپ لە 1- نىزىكدەيئە وە.



$$f(x) = \frac{1}{|x+1|} \quad \boxed{ب}$$

$$f(x) = \frac{1}{(x+1)^2} \quad \boxed{ا}$$

دەرکەنارە ستوونىيەكان

ئەگەر لە توانادابو پروونكرندنە وەى نەخشەى پېشوو $f(x) = \frac{1}{x-1}$ بەرەو سەرە وە لەلەى راستى راستەھيئە خالدارە شىنەكە و بەرەو لەلەى خوارە وە لەلەى چەپ درىژىكەيئە وە، دەبينىت پروونكرندنە وەكە زياترو زياتر لە راستەھيئە نىزىكدەيئە وە بى ئە وەى پېيگات، دەتوانىن بلىين ئەو راستەھيئە برىتييە لە دەرکەنارى ئەستوونى پروونكرندنە وەى نەخشەكە. (لەوانەكانى داھاتوو جورىكى تر لە دەرکەنارەكان دەخوينىت).

پېناسه‌ی دهرکه‌ناره ستوونیه‌کان

ټه‌گر نه‌خشه‌ی $f(x)$ له $+\infty$ یا $-\infty$ نژیکېټه‌وه کاتیک x له c نژیکه‌بیټه‌وه، ټه‌وا راسټه‌هیځی ستوونی $x=c$ دهرکه‌ناری ستوونی پروونکردنه‌وهی نه‌خشه‌کيه. ټه‌گر بۇ نمونه‌ی 1 بگه‌رپټه‌وه ده‌بینیت هه‌ر چوار نه‌خشه‌که بریتین له نه‌خشه‌ی پړژه‌یی، بۇ هه‌ریه‌ککيان دهرکه‌ناریکی ستوونی هه‌یه ده‌کاته راسټه‌هیځی $x=1$ تېبینیکه ژماره‌ی 1 ژیره‌که به‌له‌جیاتی دانان ده‌کاته 0 به‌لام سه‌ره‌که ناکاته 0 ده‌توانین ټه‌م تېبینیه‌ گشتگیر بکه‌یت له‌پړی ټه‌م سه‌لمېنراوه.

ده‌رکه‌ناری ستوونی

سه‌لمېنراوی 3-2

ټه‌گر f و g دوو نه‌خشه‌ی به‌رده‌وام بن وټه‌گر $f(c) \neq 0$ و $g(c) = 0$ له‌کاتیکدا که $g(x) \neq 0$ له هاوسېیه‌کانی $x=c$. ټه‌وا راسټه‌هیځی $x=c$ ده‌بیټه دهرکه‌ناری ستوونی نه‌خشه‌ی.

$$h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

واته $x=c$ وا ده‌کات ته‌نھا ژیره بکات سفر.

دو‌زینه‌وهی دهرکه‌ناره ستوونیه‌کان

نمونه 2

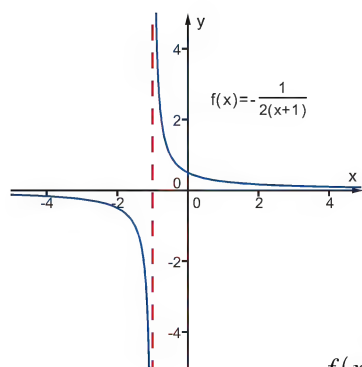
ده‌رکه‌ناره ستوونیه‌کانی هه‌ر نه‌خشه‌یه‌ک بدو‌زه‌وه.

3. $f(x) = \frac{1}{\tan x}$

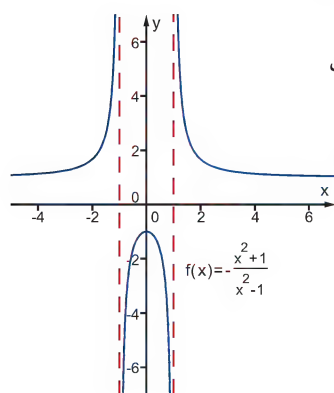
2. $f(x) = \frac{x^2+1}{x^2-1}$

1. $f(x) = \frac{1}{2(x+1)}$

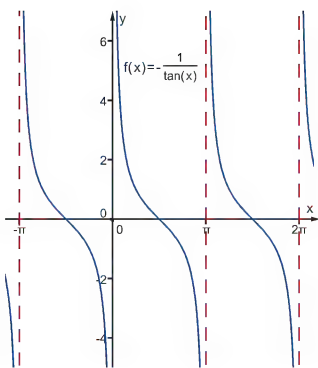
شیکار



1. ژیره‌ی نه‌خشه‌ی $f(x) = \frac{1}{2(x+1)}$ به‌های 0 وهرده‌گریټ کاتیک $x=-1$ له کاتیکدا سه‌ره‌که‌ی یه‌کسان نابیت به 0 له‌و خال‌دا. به‌پشت به‌ستن به‌سه‌لمېنراوی دهرکه‌ناره ستوونیه‌کان، راسټه‌هیځی $x=-1$ ده‌بیټه دهرکه‌ناری ستوونی نه‌خشه‌که.



2. ده‌توانیت نه‌خشه‌که به‌به‌کاره‌یانی شیته‌ل‌کردن به‌م شیوه‌ی خواره‌وه دووباره بنووسیته‌وه $f(x) = \frac{x^2+1}{(x-1)(x+1)}$ نووسینی نه‌خشه به‌م شیوه‌یه پروونیده‌کاته‌وه که 1 و -1 ژیره ده‌کته سفر به‌له‌جیاتی دانان. له‌لایه‌کی تر هیچیبه له‌و دوو ژمارانه سه‌ره ناکته 0، به‌پړی سه‌لمېنراوی دهرکه‌ناره ستوونیه‌کان راسټه‌هیځه‌کانی $x=1$ و $x=-1$ ده‌بنه دهرکه‌ناری ستوونی نه‌خشه‌که وه له‌ویننه‌ی پروونکردنه‌وه‌یی به‌رامبه‌ر ده‌رده‌که‌وټ.



3. دوتوانیت نهخشه که به شیوهی $f(x) = \frac{\cos x}{\sin x}$ دوباره بنویسید. ژیره دهیته 0 کاتی که x نهو بهایانه و دردهگریته که $\sin x$ دهکته نه 0 که بریتین له چندهجاریکانی π له لایه کی تر نهو بهایانه سره ناکته نه 0 به پیی سلهمیترای درکه ناره ستونییهکان راسته هیلهکانی $x = n\pi$ که $n \in \mathbb{I}$ هه موویان درکه ناری ستونین بو نهو نهخشیه وهک له وینهی بهرامبردا دردهکته ویت.

نهو مهرجهی که دهیته 0 $f(c) \neq 0$ له سلهمیترای درکه ناری ستونی مهرجیکی بنه پرتیه بو نهو هیله $x = c$ بیته درکه ناری ستونی نهخشه که (سهیری نمونه 3 بکه).

2. هه موو درکه ناره ستونییهکان بو هر نهخشیه که بدوزهوه.

$f(x) = \frac{1}{\cos x}$ [ج]

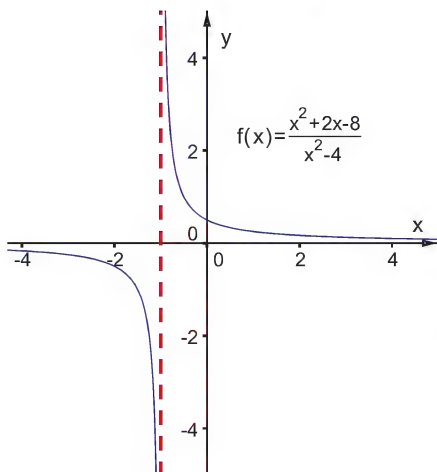
$f(x) = \frac{x-1}{x^2-4}$ [ب]

$f(x) = \frac{2}{3x-2}$ [ا]



نمونه 3

نهخشیه کی ریژهی سره و ژیره کی کۆلکهی هاویهشی هه بیته.



هه موو درکه ناره ستونییهکانی نهخشیه $f(x) = \frac{x^2 + 2x - 8}{x^2 - 4}$ بدوزهوه.

شیکار

دهستبکه به نووسینی نهخشه که به سادهترین شیوه

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x - 8}{x^2 - 4} = \frac{(x+4)(x-2)}{(x-2)(x+2)} = \frac{x+4}{x+2}; \quad x \neq -2$$

دوو ژماره 2 و -2 ژیره که دهکته سفر به له جیاتیدانان، ئاشکرایه که $x = -2$ درکه ناری ستونییه بو نهخشه که چونکه ژیره که دهکته 0 به له جیاتیدانان و سره کهش ناکته 0

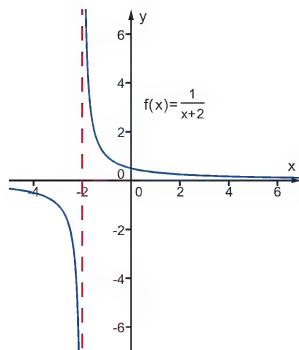
به لام $x = 2$ سره و ژیره دهکته 0 به له جیاتیدانان. پوونکردنه وهی نهخشیه f له گهل پوونکردنه وهی نهخشیه $g(x) = \frac{x+4}{x+2}$ جووت دهبن کاتی که $x \neq 2$ له م تییینیه دردهچیته که به های $f(x)$ نه له $+\infty$ و نه له $-\infty$ نزیک نابنه وه کاتی که x له 2 نزیکه بیته وه، بهمیش راسته هیله $x = 2$ نابیته درکه ناری ستونی نهخشه که.

3. هه موو درکه ناره ستونییهکانی نهخشیه $f(x) = \frac{x+3}{x^2-9}$ بدوزهوه.

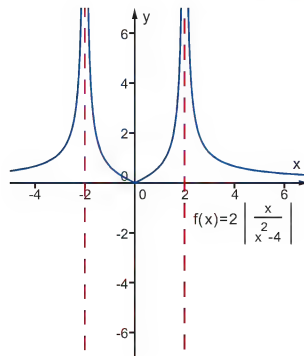


له راهیانانی 1 تا 4 ئامانجی $f(x)$ بدۆزوه کاتیك x له لای راست و له لای چهپ له 2-نزیكده بیتهوه.

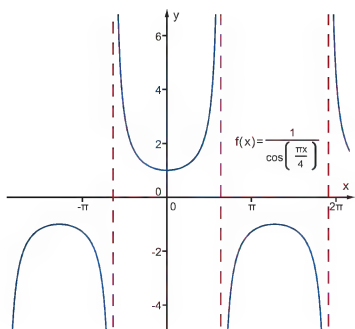
$$f(x) = \frac{1}{x+2} \quad \text{2}$$



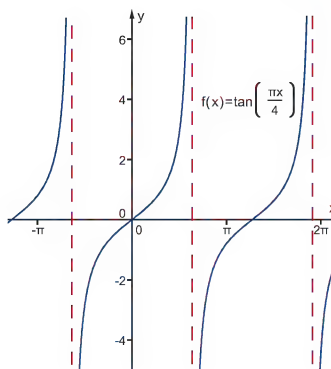
$$f(x) = 2 \left| \frac{x}{x^2 - 4} \right| \quad \text{1}$$



$$f(x) = \frac{1}{\cos\left(\frac{\pi x}{4}\right)} \quad \text{4}$$



$$f(x) = \tan\left(\frac{\pi x}{4}\right) \quad \text{3}$$



له راهیانانی 5 تا 13 دهركه ناره ستوونیه كانی نهخشه كه بدۆزوه ئه گهر هه بوو.

$$f(x) = \frac{x^2 - 2}{x^2 - x - 2} \quad \text{7}$$

$$f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 9} \quad \text{6}$$

$$f(x) = \frac{1}{x^2} \quad \text{5}$$

$$f(x) = \frac{1}{\cos(\pi x)} \quad \text{10}$$

$$f(x) = \frac{x-1}{x^2+1} \quad \text{9}$$

$$f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 4} \quad \text{8}$$

$$f(x) = \frac{\tan x}{x} \quad \text{13}$$

$$f(x) = \frac{x^3 + 1}{x + 1} \quad \text{12}$$

$$f(x) = 1 - \frac{1}{x^2} \quad \text{11}$$

دەربارەى چەمكەكان

14 بەشپوازی خۆت مانای ئامانجى بېپايان باسبە ئايا $+\infty$ ژمارەيەكى پاستيە.

15 بەشپوازی خۆت باسى دەرکەنارى ستوونى بکە.

16 نەخشەيەكى پېژەيى بنووسە دەرکەنارى ستوونى لە $x=6$ ويەككى تر لە $x=-2$ دا و سفرى لە $x=3$ دا ھەيٲ.

17 ئايا ھەموو نەخشەيەكى پېژەيى دەرکەنارى ستوونى ھەيە؟ وەلامەكەت پرونبكەو.

18 **ناوئندە خيړايى** دوورى نۆوان دوو شار d km دەيٲ. شوڤيړك دووريەكەى بەچوون وھاتن برى خيړايەكەى لە چوون و ھاتنيدا 50 km/h و خيړايەكەى لە چوون x km/h و لەھاتن y km/h بو.

ا) بيسەلمېئە كە پەيوەندى لەنۆوان x و y بەم شووہە دەنوسرېت $y = \frac{25x}{x-25}$ ، بوارى ئەو نەخشەى

بە $f(x) = y$ پېئاسەكراوہ چەئدە؟

ب) خشتەكە تەواوبكە.

x	30	40	50	60
y				

ئايا بەھايەكانى y جياوازە لەو بەھايانەى كە پېشبينيت دەرکەت؟ وەلامەكەت پرونبكەو.

ج) ئامانجى y بدۆزەوہ كاتيک x لەلای راست لە 25 نزيكەدەيٲتەوہ و ئەنجامەكە ليكبدەوہ.

راست يان ھەلە؟ لە راھيئاننى 19 تا 22 دياربەكە ئەگەر پستەكە راستە ھويەكەى ليكبدەوہ يان ھەلەيە ئەوا بەدژە نموونەيەك بيسەلمېئە.

19 ئەگەر $p(x)$ نەخشەيەكى راھەدارى بېت ئەوا نەخشەى $f(x) = \frac{p(x)}{x-1}$ دەرکەنارى ستوونى لە $x=1$ ھەيە

20 ئەگەر f نەخشەيەكى پېژەيى بېت ئەوا بەلایەنى كەم دەرکەناريكى ستوونى ھەيە.

21 نەخشەى راھەدار دەرکەنارى ستوونى نيبە.

22 ئەگەر نەخشەى f دەرکەنارى ستوونى لە $x=0$ دا ھەيٲ ئەوا لەو خالەدا پېئاسەنەكراوہ.

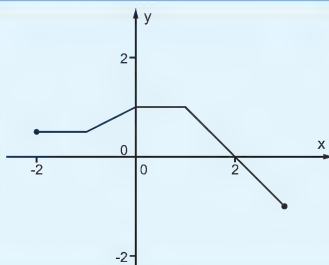
23 نەخشەى f و g بدۆزەوہ كە $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow c} g(x) = +\infty$ لەكاتيکدا $\lim_{x \rightarrow c} [f(x) - g(x)] \neq 0$

دەربارەى چەمكەكان

24 پرونكردنەوہى ئەو نەخشەى لە بەرامبەردا كيٲشراوہ

بەكاربەھيئە بۆ كيٲشانى پرونكردنەوہى

$g(x) = \frac{1}{f(x)}$ لە نۆوان $x=-2$ و $x=3$.



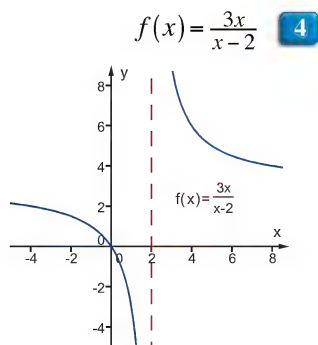
پیداچوونەوی بەش

لە دوو راهیانی 1 و 2 دا دیاریکە ئەگەر شیکارکردنی پرسیارەکه پیویست بەبەکارهێنانی هەژمارکردنی جیاکاری و تەواوکاری دەبێت یان دەتوانرێت تەنها بەبەکارهێنانی جەبر شیکاری بکەیت ئەگەر بەجەبر شیکاردەکرێت، شیکارەکهی بدۆزەوه ئەگەر نەتوانرا هۆیکەهی پروونیکەوه.

1 درێژی پارچە هێلی نیوان خالەکانی (1, 1) و (3, 9) لەسەر پروونکردنەوی نەخشە $f(x) = 4x - 3$ بدۆزەوه.

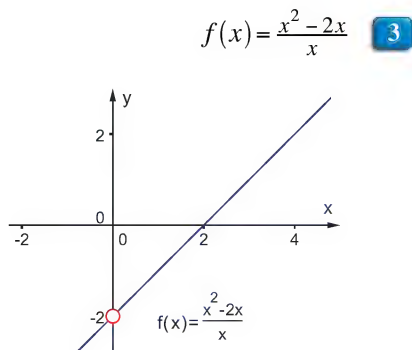
2 درێژی ئەو کەوانەیی بە خالەکانی (1, 1) و (3, 9) دیاریکراوه لەسەر پروونکردنەوی نەخشە $f(x) = x^2$ بدۆزەوه.

لە دوو راهیانی 3 و 4 دا وێنە پروونکردنەوی نەخشەکه بەکاربهێنە بۆ دۆزینهوی ئامانجی داواکراو.



$\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ **ب**

$\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ **ا**



$\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ **ب**

$\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ **ا**

لە راهیانی 5 تا 15 دا ئەگەر کرا ئەمانەیی دیت بدۆزەوه.

7 $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{x - 4}$

6 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - 2}{x^2 - 4}$

5 $\lim_{x \rightarrow 4} \sqrt{x + 2}$

10 $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 4}{x^3 + 8}$

9 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x+1} - 1}{x}$

8 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4+x} - 2}{x}$

13 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\sin x}$

12 $\lim_{x \rightarrow -5} \frac{x^3 + 125}{x + 5}$

11 $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{4x}{\tan x}$

14 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{6} + \Delta x\right) - \frac{1}{2}}{\Delta x}$ لەبیرت $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$

15 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\cos(\pi + \Delta x) + 1}{\Delta x}$ لەبیرت $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$

لە دوو راهیانی 16 و 17 دا ئامانجی داواکراو بدۆزەوه ئەگەر زانیت $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = -\frac{3}{4}$ و $\lim_{x \rightarrow c} g(x) = \frac{2}{3}$.

17 $\lim_{x \rightarrow c} (f(x) + 2g(x))$

16 $\lim_{x \rightarrow c} (f(x)g(x))$

له پاهینانی 18 تا 22 نامانجی داواکراو بدۆزهوه (ئەگەر هەبوو) یان ئەگەر نەبوو هۆیهکەى دیاریکە.

18 نامانجی نەخشەى $f(x) = \frac{|x-3|}{x-3}$ بدۆزهوه کاتیکی x لەلای راست له 3 نزیکدەبێتەوه.

19 $\lim_{x \rightarrow 4} [x-1]$ کاتیکی $[x]$ گەورەترین ژمارەى تەواو بچووکتەر یا یەکسان بێت بە x .

20 $f(x) = \begin{cases} (x-2)^2 & x \leq 2 \\ 2-x & x > 2 \end{cases}$ کاتیکی $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$

21 نامانجی نەخشەى $f(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x} & x \leq 1 \\ x+1 & x > 1 \end{cases}$ کاتیکی x لەلای راست له 1 نزیکدەبێتەوه.

22 $f(x) = \begin{cases} x^3+1 & x < 1 \\ \frac{1}{2}(x+1) & x \geq 1 \end{cases}$ کاتیکی $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

23 $f(x) = \begin{cases} -x^2-4x-2 & x \leq -2 \\ x^2+4x+6 & x > -2 \end{cases}$ کاتیکی $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$

له پاهینانی 24 تا 32 دیاریکە ئایا نەخشەکە خالی پچرانی هەیه، ئەگەر هەیبوو بیدۆزهوه.

24 $f(x) = [x+3]$ 25 $f(x) = \frac{3x^2-x-2}{x-1}$ 26 $f(x) = \begin{cases} 5-x & x \leq 2 \\ 2x-1 & x > 2 \end{cases}$

27 $f(x) = \begin{cases} \frac{3x^2-x-2}{x-1} & x \neq 1 \\ 0 & x = 1 \end{cases}$ 28 $f(x) = \frac{1}{(x-2)^2}$ 29 $f(x) = \sqrt{\frac{x+1}{x}}$

30 $f(x) = \frac{3}{x+1}$ 31 $f(x) = \frac{x+1}{2x+2}$ 32 $f(x) = \frac{1}{\sin \frac{\pi x}{2}}$

33 بەهای c بدۆزهوه کەوا له نەخشەى $f(x) = \begin{cases} x+3 & x \leq 2 \\ cx+6 & x > 2 \end{cases}$ دهکات خالی پچرانی نەبێت.

34 بەهای c و بەهای b بدۆزهوه کەوا له نەخشەى $f(x) = \begin{cases} x+1 & 1 < x < 3 \\ x^2+bx+c & |x-2| \geq 1 \end{cases}$ دهکات خالی پچرانی نەبێت.

35 سەلمێنراوی نۆوانە بەهایەکان بەکاربهێنە بۆ ئەوهی بسەلمێنیت نەخشەى $f(x) = 2x^3-2x-1$ پەگێکی له نۆوان 1 و 2 دا هەیه.

له پاهینانی 36 تا 39 دەرکەنارە ستوونییهکان دیاریکە ئەگەر هەبوو.

36 $f(x) = 1 + \frac{2}{x}$ 37 $f(x) = \frac{4x}{4-x^2}$ 38 $f(x) = \frac{8}{(x-10)^2}$ 39 $f(x) = \frac{1}{\sin \pi x}$

40 نەخشەى $f(x) = \frac{\tan 2x}{x}$ بەکاربهێنە کە $x \neq 0$.

ا) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ بدۆزهوه ئەگەر هەبوو.

ب) ئایا دەتوانیت دووبارە پێناسەى نەخشەکە له $x=0$ بکەیتەوه بەشێوهیهک بەردەوام بێت لهو خالە؟ وهلامەکەت پوونبکەوه.

ئامادەكارى بۇ تاقىكرىدەو

نەخشەى $f(x) = \begin{cases} 2-x & x \leq 1 \\ \frac{x}{2}+1 & x > 1 \end{cases}$ بەكاربەيتە بۇ شىكارىكرىدى پىرسىيارەكانى 1 تاكو 4.

1 بەهى $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ چەندە؟

ا ☐ $\frac{5}{2}$ ب ☐ $\frac{3}{2}$ ج ☐ 1 د ☐ 0 ه ☐ بوونى نىيە.

2 بەهى $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ چەندە؟

ا ☐ $\frac{5}{2}$ ب ☐ $\frac{3}{2}$ ج ☐ 1 د ☐ 0 ه ☐ بوونى نىيە.

3 بەهى $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ چەندە؟

ا ☐ $\frac{5}{2}$ ب ☐ $\frac{3}{2}$ ج ☐ 1 د ☐ 0 ه ☐ بوونى نىيە.

4 بەهى $f(1)$ چەندە؟

ا ☐ $\frac{5}{2}$ ب ☐ $\frac{3}{2}$ ج ☐ 1 د ☐ 0 ه ☐ جگە لە

5 بەهى $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x}{x-2}$ چەندە؟

ا ☐ $-\infty$ ب ☐ $+\infty$ ج ☐ 1 د ☐ $-\frac{1}{2}$ ه ☐ -1

6 بەهى $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2x}{x}$ چەندە؟

ا ☐ $\frac{1}{2}$ ب ☐ 1 ج ☐ 2 د ☐ $\cos 2$ ه ☐ بوونى نىيە.

7 بەهى $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x}$ چەندە؟

ا ☐ $\frac{1}{3}$ ب ☐ 1 ج ☐ 3 د ☐ $\sin 3$ ه ☐ بوونى نىيە.

8 لە چ ماوئەك نەخشەى $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ خال يان خالەكانى پىچرانى دەبىت؟

ا ☐ $]0, +\infty[$ ب ☐ $[-\infty, 0[$ ج ☐ $]1, 2[$ د ☐ $]0, 2[$ ه ☐ $]1, +\infty[$

9 كام لەو خالانەى خواروئە خالى پىچرانى نىيە بۇ نەخشەى $f(x) = \sqrt{x-1}$ ؟

ا ☐ $x = -1$ ب ☐ $x = -\frac{1}{2}$ ج ☐ $x = 0$ د ☐ $x = \frac{1}{2}$ ه ☐ $x = 1$

10 کام له مانه ی خواروه بو نه خشه ی $f(x) = \begin{cases} 2x & 0 < x < 1 \\ 1 & x = 1 \\ -x + 3 & 1 < x < 2 \end{cases}$ راست نییه.

ا $f(1)$ پیناسه نه کراوه $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ هیه $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ هیه $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) \neq f(1)$ هیه

ب $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ هیه $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) \neq f(1)$ هیه

11 کام له مانه ی خواروه خالی پچرانه بو نه خشه ی $f(x) = \frac{x(x-1)(x-2)^2(x+1)^2(x-3)^2}{x(x-1)(x-2)(x+1)^2(x-3)^3}$ ولابردنی له توانادا نییه؟

ا $x = -1$ ب $x = 0$ ج $x = 1$ د $x = 2$ ه $x = 3$

12 کام له مانه ی خواروه بو نه خشه ی $f(x) = \begin{cases} \frac{3}{4}x & 0 \leq x < 4 \\ 2 & x = 4 \\ -x + 7 & 4 < x \leq 6 \\ 1 & 6 < x < 8 \end{cases}$ راست نییه.

ا $\lim_{x \rightarrow 4} f(x)$ هیه ب $f(4)$ هیه ج $\lim_{x \rightarrow 6} f(x)$ هیه

د $\lim_{x \rightarrow 8} f(x)$ هیه ه $f(x)$ بهر دهوام $x = 4$

13 کام له مانه ده بیته هاو کی شه ی لیکه وتی نه خشه ی $f(x) = 9 - x^2$ له $x = 2$ ؟

ا $y = \frac{1}{4}x + \frac{9}{2}$ ب $y = -4x + 13$ ج $y = -4x - 3$

د $y = 4x - 3$ ه $y = 4x + 13$

14 ئه مانه نه خشانه ی خواروه به های x هر چند بیت جگه له $x = 0$ پیناسه کراوه، کام له مانه نه خشانه ده توانیت له $x = 0$ پیناسه بکیت بو ئه وه ی له $x = 0$ بهر دهوام بیت.

ا $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ ب $f(x) = \cos \frac{1}{x}$ ج $f(x) = \frac{x}{x^2}$

د $f(x) = \frac{\tan x}{x}$ ه $f(x) = \frac{\cos x}{\sin x}$

15 $f(x) = \begin{cases} x^2 + 4 & x < -1 \\ x^3 - 8 & x \geq -1 \end{cases}$

کام له مانه به هایانه ی a نه خشه ی f له ماوه ی $]-\infty, +\infty[$ ده کاته نه خشه یه کی بهر دهوام؟

ا $a = -1$ ب $a = -8$ ج $a = 9$

د $a = -10$ ه هیچ به هایه کی a جیبه جیبی ناکات.

Derivative

داتاشراو

بەشى سىيەم

وانەكان

1-3 داتاشراو و بابەتى لىكەوت

2-3 رېسايەكانى داتاشراو

تاقىكردەنەۋەي نىۋەي بەش

3-3 داتاشراوى خۇبەخۇ و

داتاشراۋە بەرزەكان

4-3 تىكرى گۆرپانەكان

پىداچوونەۋە

ئامادەكارى بۇ تاقىكردەنەۋە

لەۋىنەكە گەردەكانى ماددەي پاراسىتامۇل
Paracetamol دەردەكەۋىت كە بۇ

كەمكردەنەۋەي ئازارەكان بەكاردەھىنرەيت.

سۈدبەخش دەبىت كاتىك ھىندى رېپىدراو

ۋەردەگىرەيت، بەلام كارىگەرى خراپى

دەبىت تا رادەي ژەھراۋىيۈن ئەگەر ھىندى

رېپىدراو لە بەكارھىنەنى رەچاۋ نەكرەيت.

لەيەكەك لە توۋىنەۋەكان دەرەكەۋتۈۋە

تەنھا رېژەي 30% خەلكان رەچاۋى ھىندى

دىارىكاراۋ دەكەن لە بەكارھىنەنىدا.

نەخشەي $D(t) = \frac{750t}{t+12}$ نموونەيەكە بۇ

ھەژماركردنى بېرى رېپىدراو بۇ مىندالان لە

تەمەنى 1 سالى تا 12 سالى كاتىك t

ھىمايە بۇ تەمەنى مىندال بەسال.

ئایا تۆ ئامادەیت؟

زاراۋەكان ✓

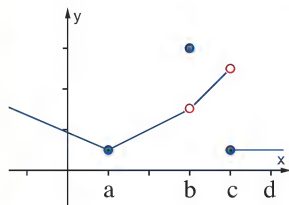
ھەر دەستەواژەيەكى لای راست بېستەۋە بە لىكدا نەۋەكەي لە لای چەپ.

1. لاری راستەھیل 1
2. نەخشەي بەردەوام
3. پچرانىك تواناي
4. دەرکەناری ستوونی
5. $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L$

- ا. راستەھیلەي ئەستوونە، خالى $(x, f(x))$ ی سەر پوونکردنەۋەي نەخشەي f لایى نەزىكەبەيتەۋە، كاتىك بەھاي x لە c نەزىكەبەيتەۋە.
- ب. پېژەي بەرەۋپېشچوونی ستوونی بۆ بەرەۋ پېشچوونی ئاسۆي راستەھیلەكەيە.
- ج. نەخشەي $f(x)$ لە ژمارەي L نەزىكەبەيتەۋە كاتىك x لە c نەزىكەبەيتەۋە.
- د. نەخشەيەكە دەتوانریت پوونکردنەۋەكەي بەقەلەم لەسەر كاغەزىك بکیشریت بى ئەۋەي دەستی لى ھەلگرین.
- ه. نەخشەيەكە پوونکردنەۋەكەي پچرانی تېدايە.
- و. خالىكى پچرانە بۆ نەخشەكە دەتوانریت بەدووبارە پېناسەکردنەۋە لا بېردریت.

ھەبوونی ئامانجەكان ✓

لە رايەتانی 2 تا 7 نەخشەي f كە لە وێنەي بەرامبەردا پوونکراۋەتەۋە بەكاربەيتە. دياربەكە ئایا ئامانج بوونی ھەيە يان نا.



$$\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) \quad \text{4}$$

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) \quad \text{3}$$

$$\lim_{x \rightarrow d} f(x) \quad \text{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) \quad \text{7}$$

$$\lim_{x \rightarrow b} f(x) \quad \text{6}$$

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) \quad \text{5}$$

نەخشە بەردەوامەكان ✓

لە رايەتانی 8 تا 11، نەخشەي f كە وێنەكەي لەسەرەۋەدا پوونکراۋەتەۋە بەكاربەيتە. ئایا نەخشەكە بەردەوامە لە خالەكە يان نا، دياربەكە.

$$x = d \quad \text{11}$$

$$x = c \quad \text{9}$$

$$x = b \quad \text{9}$$

$$x = a \quad \text{8}$$

ھەژمارکردنی ئامانجەكان ✓

لە رايەتانی 12 تا 14، ئامانج بدۆزەۋە.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{4x} \quad \text{14}$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + 1}{3x^2 - 2x + 5} \quad \text{13}$$

$$\lim_{x \rightarrow -4} \sqrt{1 - 2x} \quad \text{12}$$

ھاۋكېشەي راستەھیل ✓

لە دوو رايەتانی 15 و 16 دا لاری ئەو راستەھیلەي بەو دوو خالەدا دەروات بدۆزەۋە.

$$(1, -3) : (-2, -1) \quad \text{16}$$

$$(-2, 3) : (2, -1) \quad \text{15}$$

لە دوو رايەتانی 17 و 18 دا ھاۋكېشەي ئەو راستەھیلە بدۆزەۋە كە لاریبەكەي دياربەكراۋە و بە خالە دياربەكراۋەكەدا دەروات.

$$(-2, -5) : \frac{5}{4} \quad \text{18}$$

$$(1, 2) : -\frac{2}{3} \quad \text{17}$$

داتاشراو و بابه تی لیکهوت

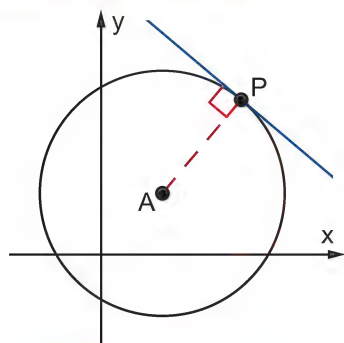
Derivative and the Tangent Problem



نیسحاق نیوتن 1642-1727
له گڼل کارکردنې له پېڅښتنې هڅمارکردنې
جیاکاری و تهواوکاری (نیسحاق نیوتن،
به شاریه کی گهوری له فیزیا دا کردووه،
له وانهش یاسای تاودانی زهوی و سی
یاسایه کی جولان)

بابه تی لاری

- جیاکاری و تهواوکاری پېڅکهوت، به هوی لیکولینه وه له چوار بابه تی سهرکی، که زانا بیرکاریه نه وروپییه کان له سده دی حقه مدا گرنگیان پیدا.
- بابه تی لیکهوت.
- بابه تی خیرایی و تاودان.
- بابه تی بهایه کانی گهوره ترین و بهایه کانی بچووکترین.
- بابه تی پرووهر.



هر بابته تیک لهو بابته تانه چه مکی ئامانج
دمگریته خوی. له هر یه کیکیانه وه دتوانین
بچینه ناو هڅمارکردنې جیاکاری و
تهواوکاری.

ئامانجه کان

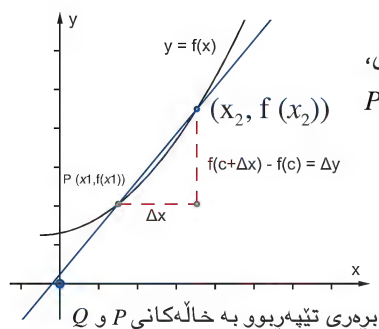
- لاری لیکهوتی پروونکردنه وهی نه خشه یه له خالیگ له خاله کانیدا ددوژیته وه.
- پېناسی ئامانج بو دوزینه وهی داتاشراوی نه خشه به کارده هیئت.
- له پیوهندی نیوان به رده وای نه خشه و توانای داتاشراوه کی تیده گات.

زاراوه کان Vocabulary

پژدهی دوو جیاوای	Difference quotient
برهر	Secant
لیکهوت	Tangent
لاری	Slope
داتاشراوی یان توانای	
داتاشراوی هیه	
Differentiable	
داتاشراو	Derivative

دوزینه وه

جیاکردنه وهی لاری: وینه ی پروونکردنه وهی نه خشه ی $f(x) = 2x^3 - 4x^2 + 3x - 5$ بکیشه له هه مان پرووته ختی پووتانه کان راسته هیله کانی $y = x - 5$ و $y = 2x - 5$ و $y = 3x - 5$ بکیشه، کام له م راسته هیلانه وک لیکهوتی پروونکردنه وهی نه خشه که له خالی $(-5, 0)$ دهرده که ویت، تیروانیت پروونیکه وه.



له وانه کانی پېشوو باسی لیکه وتمان کردو گه یشینه نه وهی که نه و بابته بو دوزینه وهی لاری لیکهوت دمگریته وه، بو دوزینه وهی لاری نه خشه ی f له خالی P دا له سهر پروونکردنه وهی، دتوانیت هه ژماری بهای نیکه یی لاری نه و لیکهوت له خالی P بکهیت، به به کاره یانی راسته هیلیک که به خالی لیکهوت P و خالیکی تری سهر پروونکردنه وهی نه خشه که دا دهروات، ههروه که له وینه ی به رامبه ردا پروونکراوته وه، به و راسته هیله دوتریت بره ی پروونکردنه وهی نه خشه که. نه گهر $P(x_1, f(x_1))$ خالیکی لیکهوت و $Q(x_2, f(x_2))$ خالیکی تری سهر پروونکردنه وهی نه خشه که بیت، نه و لاری نه و راسته هیله ی به و دوو خاله دا دهروات دهکاته:

$$m_{\text{sec}} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

کاتیک $\Delta x = x_2 - x_1$ و $\Delta y = f(x_2) - f(x_1)$

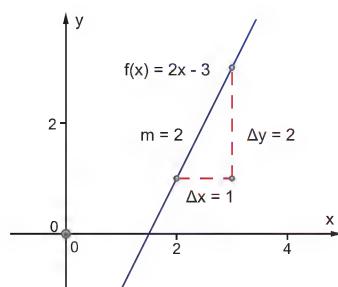
به پړژهي $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ دهوتریت پړژهي دوو جياوازي. Δx بریتیه له گوران له بهایه کانی x و Δy بریتیه له گوران له بهایه کانی y که له گورانی بهای x ددرهچیت، دهوانیت نه و پړژهي به دسکهوتنی بهای نیکه بی لاری لیکهوت به کاربهینیت، وردی نه و بهایه زیادهکات هرچه نده Q له خالی P نیکه بیته وه.

پیناسی لاری نه خشه له $x = c$

نه گهر f نه خشه یه ک بیت و نه م نامانجه هه بیت

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(c+\Delta x) - f(c)}{\Delta x} = m$$

نه و لیکهوتی پروونکرده و هی نه خشه که له $P(c, f(c))$ بریتیه له و راسته هیله لاری به که m و به خالی P دا ده پوات، به لاری لیکهوتی پروونکرده و هی لاری نه خشه که له خالی $P(c, f(c))$ پییده و تریت لاری نه خشه که له $x = c$.



لاری نه خشه هیله $f(x) = 2x - 3$ له $x = 2$ بدوژده. بو دوژینه و هی لاری نه خشه که له $x = 2$ دهوانیت پیناسی لاری نه خشه که به کاربهینیت.

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(2+\Delta x) - f(2)}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{[2(2+\Delta x) - 3] - [2(2) - 3]}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{4 + 2\Delta x - 3 - 4 + 3}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2\Delta x}{\Delta x} \\ &= 2 \end{aligned}$$

که واته لاری نه خشه هی $f(x) = 2x - 3$ له $x = 2$ دهکاته $m = 2$.

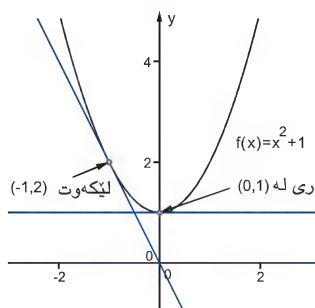
1 نمونه

لاری نه خشه هیله

1. لاری نه خشه هیله $f(x) = -3x - 5$ له $x = -3$ بدوژده.



له بهر نه و هی وینه پروونکرده و هی نه خشه هیله راسته هیله، نه و لاری نه خشه هیله له هر خالی که له خاله کانی وینه پروونکرده و که هه مان بهایه، به لام کاره که جیاوازه کاتیک نه خشه که هیله نه بیت.



لاری f له $x = c$ بریتیه له $m = 2c$

لاری نه خشه یه ک بیت نه بیت

2 نمونه

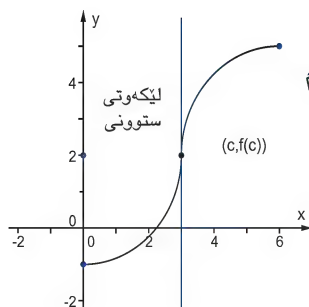
لاری نه خشه دوو جایی $f(x) = x^2 + 1$ له $x = c$ پاشان له $x = 0$ و $x = -1$ دا بدوژده.

نه گهر $(c, f(c))$ خالی ک بیت له سهر پروونکرده و هی نه خشه f نه و لاری لیکهوت له و خاله دا دهکاته:

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(c+\Delta x) - f(c)}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{[(c+\Delta x)^2 + 1] - [c^2 + 1]}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{c^2 + 2c\Delta x + (\Delta x)^2 + 1 - c^2 - 1}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2c\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2c + \Delta x) \\ &= 2c \end{aligned}$$

ههروهه لاری نهخشه ی f له $x = c$ دهکاته $m = 2c$ خالی $(c, f(c))$ ی سر وینه ی پروونکردنه وهکە ی هه ر چەند بێت، له مهش دهرده چیت لاری نهخشه که له $x = 0$ دهکاته $m = 2(0) = 0$ و له $x = -1$ دهکاته $m = 2(-1) = -2$

2. لاری نهخشه دوو جایی $f(x) = -2x^2 - 3$ له $x = 1$ و $x = -1$ بدۆزهوه.



پێناسە ی پێشوو بۆ لاری نهخشه یه که له خالێکی پروونکردنه وهکە ی ئهستوونبوونی لیکهوت لهو خالهدا ناگریتتهوه، له م باره دا دهتوانیت ئه م پێناسه یه به کار بهێنیت: ئه گه ر نهخشه که به ردهوام بێت له $x = c$ وه

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(c + \Delta x) - f(c)}{\Delta x} = +\infty$$

یان

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(c + \Delta x) - f(c)}{\Delta x} = -\infty$$

ئەوا راسته هێلی ئهستوونی $x = c$ لیکهوتی ئهستوونی نهخشه که یه له خالی $(c, f(c))$ وه لاری نهخشه که لهو خالهدا پێناسه نهکراوه.

لهوینه ی بهرامبه ردا نهخشه یه که دهرده که ویت لیکهوتی ئهستوونی له $x = 3$ هیه.

پێناسە ی داتاشراو

به نهخشه ی f دهوتریت توانای داتاشراوی هیه له $x = c$ ئه گه ر لارییه که ی لهو خالهدا پێناسه کرابێت.

ئێستا دهتوانین پێناسه ی داتاشراوی نهخشه بکهین.

ئه گه ر f نهخشه یه که بێت توانای داتاشراوی له هه موو خالهدا بواره کهیدا هه بێت، ئەوا دهتوانیت هه ر به هیه کی c له بوا ری نهخشه که به لارییه که ی f' له $x = c$ به سه یته وه، ئەو نهخشه یه به شیوه ی f' ده نووسریت و پێی دهوتریت داتاشراوی نهخشه ی f .

ئهوانه ی له بوا ری بیرکاری کار ده که ن چهن دین هیما به کار ده هێنن بۆ ده ربهرینی به های داتاشراو

$$f' \text{ نووسینه کان ئه مانه ن. } f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \text{ و } f'(x) = \frac{df}{dx}, \frac{dy}{dx}, D_x(y), \frac{d}{dx}(f(x))$$

دۆزینه وه ی داتاشراوی نهخشه به به کاره ی تانی پێناسه

3 نموونه

داتاشراوی نهخشه ی $f(x) = \frac{2}{x}$ بدۆزه وه.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{2}{x + \Delta x} - \frac{2}{x}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{2x - 2(x + \Delta x)}{x(x + \Delta x)}}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-2\Delta x}{\Delta x(x)(x + \Delta x)} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-2}{x(x + \Delta x)} = \frac{-2}{x^2} \end{aligned}$$

3. داتاشراوی نهخشه ی $f(x) = x^3$ بدۆزه وه.

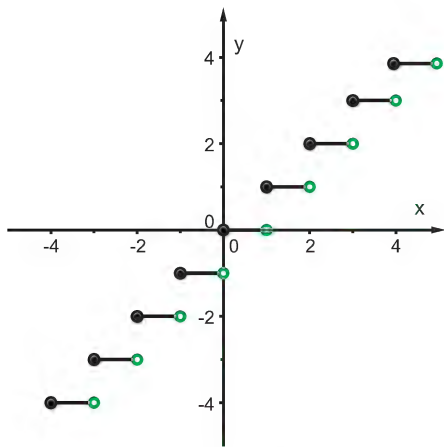


به رده وای و توانای داتاشراو

بینیمان لاری نهخشه له $x = c$ بریتیه له ئامانجی لاری ئەو بهریری به خالی $P(c, f(c))$ و خالێکی

نزیك لێی $Q(x, f(x))$ دا دهروات کاتی که Q له P نزیکه بێته وه، ئەمه ریگامان پێده دات

بنووسین $f'(c) = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$ به مه رجی که ئەو ئامانجه هه بێت.



نخشی $f(x) = [x]$ توانای

داتاشراوی نییه له خالی، $(0, f(0))$

چونکه لهو خالهدا بهردوام نییه

نګهړ نخشی f له خالی $(c, f(c))$ بهردوام نه بیټ

نوا توانای داتاشراوی لهو خالهدا نابیت. لهویننه

بهرامبر پروونکردنهووی نخشی $f(x) = [x]$

ددردهکویت که هر ژمارهیهکی راستی x به

ژمارهیهکی تهووی گهورتر که لهو زیاتر نه بیټ

دبهستیتوه، دیاره که نهو نخشیه له $x=0$ بهردوام

نییه، وتوانای داتاشراوی لهو خالهدا نییه، چونکه

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{0 - 0}{x - 0} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-1 - 0}{x - 0} = -\infty \quad \text{و}$$

کهواته $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$ بوونی نییه.

توانای داتاشراو بهردوامی دهسپینیت

سهلمینراوی 1-3

نګهړ نخشی f له خالی $(c, f(c))$ توانای داتاشراوی هه بیټ، نوا بهردوام ده بیټ لهو خالهدا.

نایا پیچهوانه ی سهلمینراوهکی سهروده راسته؟ واته نایا بهردوامی نخشیهک له خالیکی سهر

پروونکردنهوکی توانای داتاشراوی نخشکه دهسپینیت؟ وهلامهکی نه خیره، وهک له نخشی

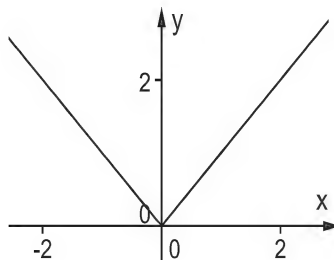
پرووی: $f(x) = |x|$ ددردهکویت.

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x| - |0|}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x}{x - 0} = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x| - |0|}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x - 0} = 1$$

نهمهش نهوه دهسپینیت $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$ بوونی نییه

بهمهش نخشکه لاری نییه له $x = 0$.



راهیان

1-3

له پرسیری 1 تا 3 لاری نخشکه له خالی دیاریکراوهکه ده بدوژده.

(0,0), $f(t) = 3t - t^2$ **3** (1,-3), $f(x) = x^2 - 4$ **2** (-1,5), $f(x) = 3 - 2x$ **1**

له پرسیری 4 تا 11 داتاشراوی هر نخشیهک به بهکارهیتانی نامانجهکان بدوژده.

$f(x) = x^3 + x^2$ **7** $f(x) = 2x^2 + x - 1$ **6** $f(x) = 3x + 2$ **5** $f(x) = 3$ **4**

$f(x) = 9 - \frac{1}{2}x$ **11** $f(x) = \frac{4}{\sqrt{x}}$ **10** $f(x) = \sqrt{x+1}$ **9** $f(x) = \frac{1}{x-1}$ **8**

له پرسیری 12 تا 15 هاوکیشی لیکهوتی نخشکه له خال دیاریکراوهکه بدوژده.

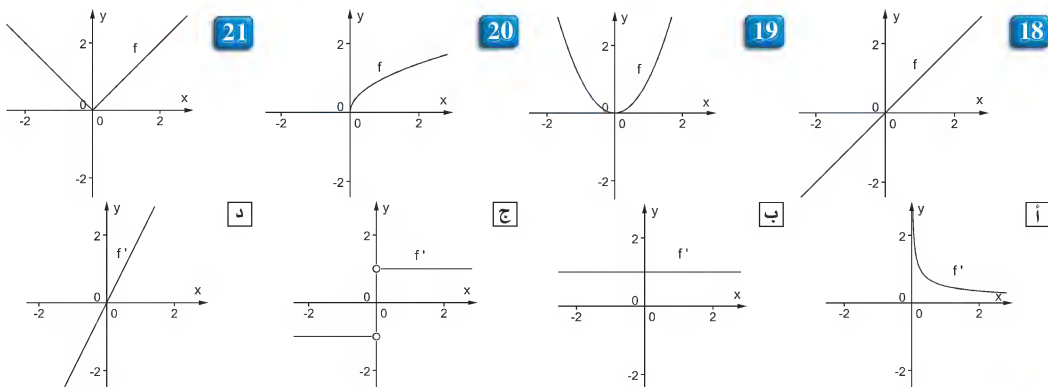
(2,8), $f(x) = x^3$ **13** (2,5), $f(x) = x^2 + 1$ **12**

(4,5), $f(x) = x + \frac{4}{x}$ **15** (5,2), $f(x) = \sqrt{x-1}$ **14**

له پاهینانی 16 و 17 دا هاوکیښه لیکهوتی نهخشه تهریب بهو راسته هیله کی هاوکیښه کی دیاریکراوه بدوژده.

$$16 \quad 3x - y + 1 = 0 : f(x) = x^3 + 2 \quad 17 \quad x + 2y - 6 = 0 : f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

له پاهینانی 18 تا 21 وینه پوونکرده و 4 نهخشه وینه پوونکرده و 4 داتاشراوه کانیاں کیښراوه، وینه پوونکرده و 4 داتاشراوی هر نهخشه کی که بؤ نهخشه که دهگه پرتوه دیاریکه.

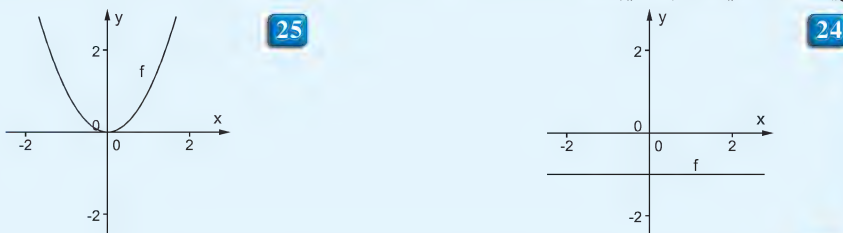


22 لیکهوتی نهخشه گ له خالی (5,2) به خالی (9,0) دا دپوات، $g(5)$ و $g'(5)$ بدوژده.

23 لیکهوتی نهخشه h له خالی (-1,4) به خالی (3,6) دا دپوات، $h(-1)$ و $h'(-1)$ بدوژده.

له باره چی مهکه کان

له دوو پاهینانی 24 و 25 دا وینه پوونکرده و 4 داتاشراوی نهخشه کیښه، چو وینه که کیښا؟ باسیکه.

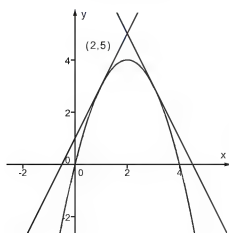


26 نهخشه کیښه بکیښه هه موو به هایهکانی داتاشراوه کی سالب بیټ.

له پاهینانی 27 تا 28 نامانجه نووسراوه که $f'(c)$ دهنوینیت. $f(x)$ و c بدوژده.

$$27 \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{[5 - 3(1 + \Delta x)] - 2}{\Delta x} \quad 28 \quad \lim_{x \rightarrow 6} \frac{-(6 + \Delta x)^2 + 36}{\Delta x}$$

له دوو پرسیری 29 و 30 دا نهخشه f که مهرجه دیاریکراوه کان جیبه جی دهکات بدوژده، پاشان وینه پوونکرده و 4 کیښه.



29 $f(0) = 2$; $f'(x) = -3$ کاتی که $-\infty < x < \infty$.

30 $f(0) = 4$; $f'(0) = 0$; $f'(x) < 0$ کاتی که $x < 0$; $f'(x) > 0$ کاتی که $x > 0$.

31 هاوکیښه دوو لیکهوته کی نهخشه $f(x) = -x(x-4)$ له وینه بهرامبر بدوژده.

32 وادابنى $f'(c) = 3$ ئەوا $f'(-c)$ كە بدۆزەوه.

ا ئەگەر f نەخشەيەكى تەك بېت.

ب ئەگەر f نەخشەيەكى جوت بېت.

33 لە وېنەي بەرامبەر پوونكر دنەوهى داتاشراوى g' بۇ نەخشەى g دەرەكەوېت.

ا $g'(0)$ بدۆزەوه.

ب $g'(3)$ بدۆزەوه.

ج چ دەرئەنجاميكت لەبارەى نەخشەى g

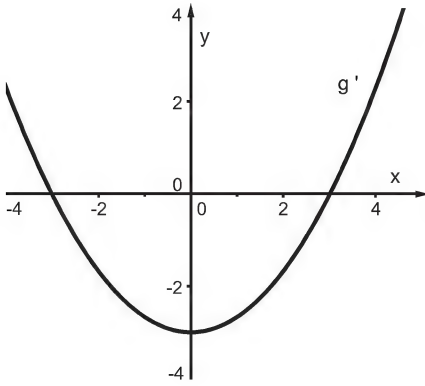
دەستدەكەوېت ئەگەر زانیت $g'(1) = -\frac{8}{3}$ ؟

د چ دەرئەنجاميكت لەبارەى نەخشەى دەستدەكەوېت

ئەگەر زانیت كە $g'(-4) = \frac{7}{3}$.

ه ئايا $g(6) - g(4)$ موجهە يان سالب؟ پوونبىكەوه.

و ئايا دەتوانیت $g(2)$ بدۆزیتەوه؟ پوونبىكەوه.

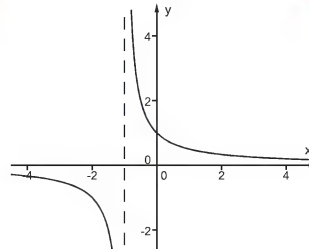
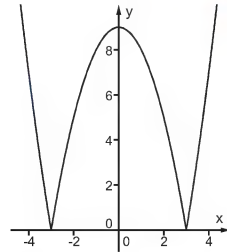
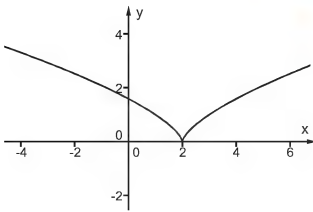


لە پرسىارى 34 تا 36 بەهائەكانى x بدۆزەوه، كاتيك نەخشەكە توانای داتاشرانى هەبېت.

36 $f(x) = (x-2)^{\frac{2}{3}}$

35 $f(x) = |x^2 - 9|$

34 $f(x) = \frac{1}{x+1}$



لە پرسىارى 37 تا 39، دياربكه كە ئەگەر رستهكه راستە هوپەكەى ليكبدەوه، يان ئەگەر هەلەيه بە دژە نمونەيهك بيسەلمېنە.

37 لارى ليكەوتى نەخشەى f كە لە خالى $(2, f(2))$ توانای داتاشرانى هەيه دەكاتە $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(2 + \Delta x) - f(2)}{\Delta x}$

38 ئەگەر نەخشەيهك لەخالليك بەردەوام بېت، ئەوا توانای داتاشرانى هەيه لەو خالەدا.

39 ئەگەر نەخشەيهك لەخالليك توانای داتاشرانى هەبېت، ئەوا بەردەوامە لەو خالەدا.

40 $g(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ و $f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ پوونبىكەوه f بەردەوامە و توانای داتاشراوى

نیه لە $x=0$ ، لەكاتيكدە g توانای داتاشراوى هەيه لەو خالە، $g'(0)$ بدۆزەوه.

رېساکانی داتاشراو Differentiation Rules

2-3

داتاشراوی نه خشه بڼه پرتیپه کان

له وانه کانی پېشوو مانای داتاشراوت زانی وئامانجت به کارهینا بؤ دوزینه ووی داتاشراوی هندیك نه خشه ی ساده، به لام ټهو پځایه ئاسان نییه بؤ زوربه ی نه خشه کان، له بهر ټهوه بیرکاریناسان په نایان برده بهر دوزینه ووی رېساکانی داتاشراو. ټهم پځایه ش پشت بهو درټه نجامه ده به ستیت که زوربه ی نه خشه کان له نه خشه بڼه پرتیپه کان به کوکړدنه ووه و لیدرکړدن و لیکدان و دابه شکردن و ئاوټه کړدن دروست ده کړین، به مه ش زانینی داتاشراوی نه خشه بڼه پرتیپه کان و ټهو رېسایانه ی که له داتاشراوکاری پیده کړیت، یارمه تیت ده دات بؤ دوزینه ووی داتاشراوی زوربه ی نه خشه کان.

ټهم خشته ی خواره ووه پوخته ی رېساکانی داتاشراوی نه خشه بڼه پرتیپه کانه.

خشته ی داتاشراوه بڼه پرتیپه کان	
داتاشراوه کوی	نه خشه
$f'(x)=0$	$f(x)=c$ کاتیک c ژماره یه کی راستیپه
$f'(x)=1$	$f(x)=x$
$f'(x)=nx^{n-1}$	$f(x)=x^n$ کاتیک $n \in \mathbb{R}$
$f'(x)=-\frac{1}{x^2}$	$f(x)=\frac{1}{x}; x \neq 0$
$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$f(x)=\sqrt{x}$
$f'(x)=-\sin x$	$f(x)=\cos x$
$f'(x)=\cos x$	$f(x)=\sin x$
$f'(x)=1+\tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$	$f(x)=\tan x$
$f'(x)=e^x$	$f(x)=e^x$
$f'(x)=\frac{1}{x}$	$f(x)=\ln x$

ټامانجه کان

- داتاشراوی نه خشه بڼه پرتیپه کان ده ناسیت و به کاریانده هینیت.
- رېساکانی داتاشراو دیاریده کات و به کاریانده هینیت.

به کارهینانی داتاشراوه بڼه پرتیپه کان

ټهم خشته ته وواوبکه.

داتاشراوه کوی	نه خشه
	$f(x)=x^5$
	$f(x)=\sqrt[3]{x}$
	$f(x)=\frac{1}{x^3}$

نمونه 1

داتاشراو دهکە	نەخشە
$f'(x) = 5x^4$	$f(x) = x^5$
$f'(x) = \left(x^{\frac{1}{3}}\right)' = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$	$f(x) = \sqrt[3]{x}$
$f'(x) = (x^{-3})' = -3x^{-4} = -\frac{3}{x^4}$	$f(x) = \frac{1}{x^3}$

1 نەم خشته تهواوبکه



داتاشراو دهکە	نەخشە
	$f(x) = x^{16}$
	$f(x) = \sqrt[3]{x^2}$
	$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$

پیساکانی داتاشراو

سەلمینراوی 2-3 پیسای لیڤان له نهگۆر

ئەگەر نەخشە f توانای داتاشراوی هەبێت و c ژمارەیهکی راستی بێت ئەوا نەخشە cf توانای داتاشراوی هەیه.

$$[cf(x)]' = cf'(x)$$

سەلمینراوی 3-3 پیسای سەرجهم و جیاوازی

سەرجهم یان جیاوازی دوو نەخشە توانای داتاشراویان هەبێت، دەکاتە نەخشەیهک توانای داتاشراوی هەیه.

$$[f(x) - g(x)]' = f'(x) - g'(x) \quad [f(x) + g(x)]' = f'(x) + g'(x)$$

ئێستا دەتوانین شیوهی گشتی داتاشراوی نەخشە پادەدار بدۆزینەوە، سەلماندنی ئەو سەلمینراوهی دیت نمونەیهکە بۆ چۆنیەتی بەکارهێنانی داتاشراو بۆ نەخشەیهکان و پيساکانی داتاشراو بۆ دۆزینەوەی داتاشراوی نەخشەیهک.

سەلمینراوی 4-3 داتاشراوی نەخشە پادەدار

ئەگەر

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

ئەوا

$$f'(x) = n a_n x^{n-1} + (n-1) a_{n-1} x^{n-2} + \dots + 2 a_2 x + a_1$$

سه‌لماندن

$$\begin{aligned}
 f(x) &= a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \\
 f'(x) &= \left(a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \right)' \\
 &= \left(a_n x^n \right)' + \left(a_{n-1} x^{n-1} \right)' + \dots + \left(a_1 x \right)' + \left(a_0 \right)' \\
 &= a_n \left(x^n \right)' + a_{n-1} \left(x^{n-1} \right)' + \dots + a_1 (x)' + (a_0)' \\
 &= a_n (n x^{n-1}) + a_{n-1} ((n-1) x^{n-2}) + \dots + a_1 (1) + 0 \\
 &= n a_n x^{n-1} + (n-1) a_{n-1} x^{n-2} + \dots + 2 a_2 x + a_1
 \end{aligned}$$

رېسای سرجه‌م

رېسای لیدان له نه‌گور

داتاشراوه بنه‌رته‌تیه‌کان

ساده‌کردن

به‌کاره‌یانی که‌وانه‌کان له داتاشراو

2 نمونه

نهم خشته ته‌واوبکه.

داتاشراوی ساده‌کراو	داتاشراو	رېکخستنی نه‌خشه	نه‌خشه
			$f(x) = \frac{5}{2x^3}$
			$f(x) = \frac{5}{(2x)^3}$
			$f(x) = \frac{7}{3x^{-2}}$
			$f(x) = \frac{7}{(3x)^{-2}}$
			$f(x) = \frac{4}{x\sqrt{x}}$

شیکار

داتاشراوی ساده‌کراو	داتاشراو	رېکخستنی نه‌خشه	نه‌خشه
$f'(x) = \frac{-15}{2x^4}$	$f'(x) = \frac{5}{2}(-3x^{-4})$	$f(x) = \frac{5}{2}(x^{-3})$	$f(x) = \frac{5}{2x^3}$
$f'(x) = \frac{-15}{8x^4}$	$f'(x) = \frac{5}{8}(-3x^{-4})$	$f(x) = \frac{5}{8}(x^{-3})$	$f(x) = \frac{5}{(2x)^3}$
$f'(x) = \frac{14}{3}x$	$f'(x) = \frac{7}{3}(2x)$	$f(x) = \frac{7}{3}(x^2)$	$f(x) = \frac{7}{3x^{-2}}$
$f'(x) = 126x$	$f'(x) = 63(2x)$	$f(x) = 63(x^2)$	$f(x) = \frac{7}{(3x)^{-2}}$
$f'(x) = -6\left(x^{-\frac{5}{2}}\right) = \frac{-6}{x^2\sqrt{x}}$	$f'(x) = 4\left(-\frac{3}{2}\right)\left(x^{-\frac{3}{2}-1}\right)$	$f(x) = 4\left(x^{-\frac{3}{2}}\right)$	$f(x) = \frac{4}{x\sqrt{x}}$

2. خسته که ته‌واویکه.



داتاشراوی ساده‌کراو	داتاشراو	رېځخستنی نه‌خسته	نه‌خسته
			$f(x) = \frac{-2}{3x^5}$
			$f(x) = \frac{-5}{(3x)^2}$
			$f(x) = \frac{9}{5x^{-3}}$
			$f(x) = \frac{7}{(2x)^{-5}}$

به‌کاره‌یښانی رېځسایه‌کانی داتاشراو و داتاشراوه بڼه‌په‌تییه‌کان
ټهم خسته ته‌واویکه.

3 نمونه

داتاشراو	نه‌خسته
	$f(x) = x^3 - 4x + 5$
	$f(x) = -\frac{x^4}{2} + 3x^3 - 2x$
	$f(x) = \frac{\sin x}{2}$
	$f(x) = x + \cos x$

شیکار

داتاشراو	نه‌خسته
$f'(x) = (x^3 - 4x + 5)' = (x^3)' - (4x)' + (5)' = 3x^2 - 4$	$f(x) = x^3 - 4x + 5$
$f'(x) = \left(-\frac{x^4}{2} + 3x^3 - 2x\right)' = \left(-\frac{x^4}{2}\right)' + (3x^3)' - (2x)'$ $= -2x^3 + 9x^2 - 2$	$f(x) = -\frac{x^4}{2} + 3x^3 - 2x$
$f'(x) = \left(\frac{\sin x}{2}\right)' = \left(\frac{1}{2} \sin x\right)' = \frac{1}{2} \cos x$	$f(x) = \frac{\sin x}{2}$
$f'(x) = (x + \cos x)' = (x)' + (\cos x)' = 1 - \sin x$	$f(x) = x + \cos x$

3. ټهم خسته ته‌واویکه.



داتاشراو	نه‌خسته
	$f(x) = -2x^5 + 3x^3 + 5x^2$
	$f(x) = -\frac{x^5}{5} - 7x^3 + 8$
	$f(x) = \frac{\tan x}{2} - \frac{1}{2} \sin x$
	$f(x) = \frac{1}{2}x - \cos x$

سه‌لمیټراوی 3-5

پښای نه‌نجامی لی‌کدان

نه‌نجامی لی‌کدانی دوو نه‌خشه توانای داتاشراویان هه‌بیټ ده‌کاته نه‌خشه‌یه‌ک توانای داتاشراوی

$$[f(x)g(x)]' = f'(x)g(x) + g'(x)f(x) \quad \text{هه‌یه.}$$

سه‌لمیټراوی 3-6

پښای نه‌نجامی دابه‌شبوون

نه‌گه‌ر f و g دوو نه‌خشه‌بن توانای داتاشراویان هه‌بیټ، نه‌وا نه‌خشه‌ی $\frac{f}{g}$ توانای داتاشراوی هه‌یه

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)} \right]' = \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2} \quad \text{کاتی‌ک } g(x) \neq 0$$

نمونه 4

به‌کاره‌یټنای پښاکانی داتاشراو و داتاشراوه بنه‌په‌تییه‌کان

داتاشراوی نه‌خشه‌که بدوژه‌وه.

$$f(x) = 3x^2 \sin x \quad [1] \quad f(x) = \frac{5x-2}{x^2+1} \quad [2]$$

شیکار

$$\begin{aligned} f'(x) &= [3x^2 \sin x]' = 3x^2 [\sin x]' + \sin x [3x^2]' \quad [1] \\ &= 3x^2 \cos x + (\sin x)(6x) = 3x^2 \cos x + 6x \sin x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{5x-2}{x^2+1} \right)' = \frac{(x^2+1)(5x-2)' - (5x-2)(x^2+1)'}{(x^2+1)^2} \quad [2] \\ &= \frac{(x^2+1)(5) - (5x-2)(2x)}{(x^2+1)^2} = \frac{-5x^2+4x+5}{(x^2+1)^2} \end{aligned}$$

4. داتاشراوی نه‌خشه‌که بدوژه‌وه.



$$f(x) = -2x^3 \cos x \quad [1] \quad f(x) = \frac{3x-7}{x^2-1} \quad [2]$$

نمونه 5

به‌کاره‌یټنای پښاکانی داتاشراو و داتاشراوه بنه‌په‌تییه‌کان

پښای داتاشراوی نه‌خشه‌ی $f(x) = \tan x$ بسه‌لمیټه.

شیکار

$$\begin{aligned} f'(x) &= [\tan x]' = \left[\frac{\sin x}{\cos x} \right]' = \frac{(\cos x)[\sin x]' - (\sin x)[\cos x]'}{(\cos x)^2} \\ &= \frac{(\cos x)(\cos x) - (\sin x)(-\sin x)}{(\cos x)^2} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} \end{aligned}$$

5. داتاشراوی نه‌خشه‌ی $f(x) = \frac{1}{\tan x}$ بدوژه‌وه.



ئه‌گه‌ر f نه‌خشه‌یه‌ك بیته به‌پی u توانای داتاشرانی ه‌بیته و $u = g(x)$ نه‌خشه‌یه‌ك بیته به‌پی x توانای داتاشراوی ه‌بیته، ئه‌وا نه‌خشه‌ی $y = f(g(x))$ توانای داتاشراوی ه‌یه.

$$(f(g(x)))' = f'(g(x))g'(x)$$

سه‌لماندن

$$(f(g(x)))' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{h} = \lim_{x_2 \rightarrow x_1} \frac{f(g(x_2)) - f(g(x_1))}{x_2 - x_1}$$

كاتیك $x_1 = x$ و $x_2 = x_1 + h$

$$= \lim_{x_2 \rightarrow x_1} \frac{f(g(x_2)) - f(g(x_1))}{g(x_2) - g(x_1)} \frac{g(x_2) - g(x_1)}{x_2 - x_1}$$

له‌به‌رئه‌وه‌ی نه‌خشه‌ی g به‌رده‌وامه ئه‌وا

$$= \lim_{x_2 \rightarrow x_1} \frac{f(g(x_2)) - f(g(x_1))}{g(x_2) - g(x_1)} \lim_{x_2 \rightarrow x_1} \frac{g(x_2) - g(x_1)}{x_2 - x_1}$$

$g(x_1)$ له $g(x_2)$ نزیکه‌بیته‌وه کاتیك

x_1 له x_2 نزیکه‌بیته‌وه.

$$= \lim_{g(x_2) \rightarrow g(x_1)} \frac{f(g(x_2)) - f(g(x_1))}{g(x_2) - g(x_1)} \lim_{x_2 \rightarrow x_1} \frac{g(x_2) - g(x_1)}{x_2 - x_1}$$

$$= f'(g(x))g'(x)$$

له‌وانه‌یه له دیاریکردنی ئه‌و نه‌خشانه‌ی كه نه‌خشه ئاویته‌كه پیکده‌هینن تووشی ئاسته‌نگ ببیته‌وه ئه‌و نموونه‌یه‌ی خوارمه‌وه ه‌ندیك نموونه‌ی پوونده‌كاتمه‌وه.

به‌کاره‌ینانی پیساکانی داتاشراو و نه‌خشه بنه‌په‌تییه‌کان

ئه‌م خسته ته‌واوبه‌كه.

		$y = f(g(x))$
		$y = \frac{1}{x+1}$
		$y = \sin 2x$
		$y = \sqrt{3x^2 - x + 1}$
		$y = \tan^2 x$

شیکار

$y = f(u)$	$u = g(x)$	$y = f(g(x))$
$y = \frac{1}{u}$	$u = x+1$	$y = \frac{1}{x+1}$
$y = \sin u$	$u = 2x$	$y = \sin 2x$
$y = \sqrt{u}$	$u = 3x^2 - x + 1$	$y = \sqrt{3x^2 - x + 1}$
$y = u^2$	$u = \tan x$	$y = \tan^2 x$

6. ئەم خىشتە تەواۋىكە.



$y=f(u)$	$u=g(x)$	$y=f(g(x))$
		$y = \frac{1}{\sqrt{x+1}}$
		$y = \cos \pi x$
		$y = \sqrt{4x^5 - 5x^4}$
		$y = (1 + \tan x)^2$

نمونه 7

داتاشراۋى نەخشەى ئاۋىتە
داتاشراۋى نەخشەى $y = (x^2 + 1)^3$ بدۆزەۋە.

شىكار

دەتوانىت ئەۋ دوو نەخشەى دىاربكەين كە ئەۋ نەخشە ئاۋىتەى پىكەدەىنن $u = x^2 + 1$ و $y = u^3$ لەۋەش دەردەچىت.

$$y'(x) = y'(u)u'(x) = (3u^2)(2x) = 3(x^2 + 1)^2(2x) = 6x(x^2 + 1)^2$$

7. داتاشراۋى نەخشەى $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$ بدۆزەۋە.



راھىيان

2-3

لە پرسىارى 1 تا 11 داتاشراۋى نەخشەكە بدۆزەۋە.

2 $f(x) = x^6$

1 $y = 8$

4 $f(x) = \sqrt[5]{x}$

3 $f(x) = \frac{1}{x^7}$

6 $f(x) = -2x^2 + 3x - 6$

5 $f(x) = 3x - 1$

7 $f(x) = 2x^3 - x^2 + 3x$

8 $f(\theta) = \frac{\pi}{2} \sin \theta - \cos \theta$

9 $f(x) = x^2 - \frac{1}{2} \cos x$

10 $f(x) = \frac{1}{x} - 3 \sin x$

11 $f(x) = \frac{5}{(2x)^3} + 2 \cos x$

له پاهینانی 12 تا 15 خسته که ته وایکه.

داتاشراوی ساده کړاو	داتاشراو	پیکختنی نه خسته	نه خسته بڼه پرتیه که	
			$f(x) = \frac{5}{2x^2}$	12
			$f(x) = \frac{\pi}{(3x)^2}$	13
			$f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x}$	14
			$f(x) = \frac{4}{x^{-3}}$	15

له پاهینانی 16 تا 25 داتاشراوی نه خسته که بدوژه وده.

$$f(x) = \frac{x^3 - 3x^2 + 4}{x^2} \quad 18 \quad f(t) = t^2 - \frac{4}{t^3} \quad 17 \quad f(x) = x^2 - 5 - 3x^{-2} \quad 16$$

$$f(t) = t^{\frac{4}{5}} - t^{\frac{2}{3}} \quad 21 \quad f(x) = \sqrt{x} - 6\sqrt[3]{x} \quad 20 \quad f(x) = x(x^2 + 1) \quad 19$$

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x-1}} \quad 24 \quad f(x) = x^3 \cos x \quad 23 \quad f(x) = (x^2 + 4)\sqrt{x} \quad 22$$

$$f(x) = \frac{\sin x}{x^2} \quad 25$$

له پاهینانی 26 تا 29 خسته که ته وایکه.

$y = f(u)$	$u = g(x)$	$y = f(g(x))$	
		$y = (6x - 5)^4$	26
		$y = \frac{1}{\sqrt{x-1}}$	27
		$y = 3 \tan(\pi x^2)$	28
		$y = \cos \frac{3x}{2}$	29

له پاهینانی 30 تا 50 داتاشراوی نه خسته که بدوژه وده.

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 3x + 2} \quad 32 \quad f(t) = \sqrt{1-t} \quad 31 \quad f(x) = 3(4 - 9x)^4 \quad 30$$

$$f(t) = \sqrt{\frac{1}{t^2 - 2}} \quad 35 \quad f(x) = x\sqrt{1-x^2} \quad 34 \quad f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{x+2}} \quad 33$$

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^4 + 1}} \quad 38 \quad f(x) = \left(\frac{3x^2 - 2}{2x + 3}\right) \quad 37 \quad f(x) = \left(\frac{x+5}{x^2 + 2}\right)^2 \quad 36$$

$$\begin{array}{lll}
 f(x) = \ln(x\sqrt{x^2 - 1}) & \boxed{41} & f(x) = x \ln x & \boxed{40} & f(x) = \ln x^2 & \boxed{39} \\
 f(x) = \ln \sqrt{2 + \cos^2 x} & \boxed{44} & f(x) = \ln \frac{1}{x^2} & \boxed{43} & f(x) = \frac{\ln x}{x} & \boxed{42} \\
 f(x) = \ln \left(\frac{1+e^x}{1-e^x} \right) & \boxed{47} & f(x) = x^2 e^{-x} & \boxed{46} & f(x) = e^{-x^2} & \boxed{45} \\
 f(x) = e^x (\sin x + \cos x) & \boxed{50} & f(x) = \frac{2}{e^x + e^{-x}} & \boxed{49} & f(x) = \ln e^x & \boxed{48}
 \end{array}$$

له دوو راهینانی 51 و 52 دا هاوکیښه لیکهوتی نه‌خشه‌که له‌خاله دیاریکراوه‌که‌دا بدۆزه‌وه.

$$(1, 0) : f(x) = x^4 - 3x^2 + 2 \quad \boxed{51}$$

$$(1, 2) : f(x) = \frac{2}{\sqrt[4]{x^3}} \quad \boxed{52}$$

له راهینانی 53 تا 55 نه‌و خالانه دیاریکه (نه‌گهر هه‌بیٲ) کاتیك لیکهوتی نه‌خشه‌که تییدا ئاسۆیی بیٲ.

$$f(x) = \frac{1}{x^2} \quad \boxed{54} \quad f(x) = x^4 - 8x^2 + 2 \quad \boxed{53}$$

$$0 \leq x \leq 2\pi \quad f(x) = x + \sin x \quad \boxed{55}$$

له راهینانی 56 تا 57 به‌های k کاتیك راسته‌هیله‌که ده‌بیٲه لیکهوتی نه‌خشه‌که بدۆزه‌وه.

$$y = 4x - 9 : f(x) = x^2 - kx \quad \boxed{56}$$

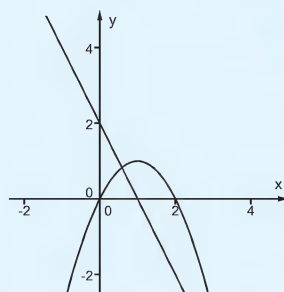
$$y = -\frac{3}{4}x + 3 : f(x) = \frac{k}{x} \quad \boxed{57}$$

ده‌باردی چه‌مکه‌کان

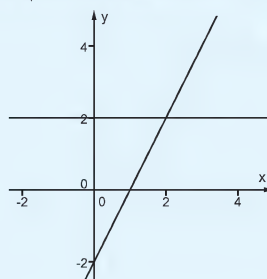
له دوو راهینانی 58 و 59 دا نه‌و په‌یوه‌ندییه بدۆزه‌وه که داتاشراوی f و داتاشراوی g به‌یه‌که ده‌به‌ستیٲ.

$$g(x) = -5f(x) \quad \boxed{59} \quad g(x) = f(x) + 6 \quad \boxed{58}$$

له دوو راهینانی 60 و 61 دا وینه‌ی پوونکردنه‌وه‌ی نه‌خشه‌ی f و وینه‌ی پوونکردنه‌وه‌ی داتاشراوه‌که‌ی له‌هه‌مان پووته‌ختی پۆتانه‌کان ده‌رده‌که‌ویٲ له‌وینه‌که ده‌رده‌که‌ویٲ، وینه‌ی پوونکردنه‌وه‌ی f و f' جیا‌به‌که‌وه و له‌به‌رامبه‌ر هه‌ر وینه‌یه‌که ناوه‌که‌ی بنووسه، باسیبکه چۆن گه‌یشتیته دیاریکردنی وینه‌ی پوونکردنه‌وه‌ی نه‌خشه‌که‌و داتاشراوه‌که‌ی.



61



60

له دوو راهینانی 62 و 63 دا پیدراوه‌کان بۆ دۆزینه‌وه‌ی به‌های $f'(2)$ به‌کاربه‌ینه.

$$h'(2) = 4 \quad h(2) = -1 \quad g'(2) = -2 \quad g(2) = 3$$

$$f(x) = g(x)h(x) \quad \boxed{63} \quad f(x) = 2g(x) + h(x) \quad \boxed{62}$$

راست يان ههله:

له پاهينانی 64 تا 69 دياربكه ئهگهر پستهكه راسته هوپهكهی ليكبدوده و ئهگهر ههلهيه بهدژه نمونهيهك بيسهلمينه.

64 ئهگهر $f'(x) = g'(x)$ ئهوا $f(x) = g(x)$.

65 ئهگهر $f(x) = g(x) + c$ ئهوا $f'(x) = g'(x)$.

66 ئهگهر $y = \pi^2$ ئهوا $\frac{dy}{dx} = 2\pi$.

67 ئهگهر $y = \frac{x}{\pi}$ ئهوا $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\pi}$.

68 ئهگهر $g(x) = 3f(x)$ ئهوا $g'(x) = 3f'(x)$.

69 ئهگهر $f(x) = \frac{1}{x^n}$ ئهوا $f'(x) = -\frac{n}{x^{n+1}}$.

70 ئهگهر نهخشه ی راده داری $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ هه بێت ئومهرجانه دياربكه كه پيوسته له a, b, c, d بېته دی بۆ ئهوهی .

ا) نهخشهكه ليكهوتی ئاسویی نه بێت.

ب) نهخشهكه تهنها يهك ليكهوتی ئاسویی هه بێت.

ج) نهخشهكه تهنها دوو ليكهوتی ئاسویی هه بێت.

بۆ ههر باريك نمونهيهك بۆ نهخشهكه بهينهوه.

تاقکردنەوهی نیوهی بەش

1-3 ✓ هەژمارکردنی داتاشراو بە بەکارهێنانی پێناسە

1 ئامانج بۆ دۆزینەوهی داتاشراوی هەر نەخشەیەک بەکارهێنە.

$$f(x) = 2\sqrt{x} - 1 \quad \text{a} \quad f(x) = -x^2 + x \quad \text{b}$$

2-3 ✓ رێساکانی داتاشراو

2 داتاشراوی هەر نەخشەیەک بدۆزەوه.

$$f(x) = 2x^2 - \frac{1}{2x^3} + \frac{2\sqrt{x}}{3} - 1 \quad \text{a} \quad f(x) = \frac{\cos 2x}{x^2} \quad \text{b}$$

$$f(x) = \ln(1 + e^x) \quad \text{c} \quad f(\theta) = \sin(\pi^2 \theta) + \cos(\pi \theta^2) \quad \text{d}$$

$$f(x) = x^3 - 3x \quad \text{3}$$

1 ھاوکیشەیی لێکەوتی پوونکردنەوهی نەخشەکە لەخاڵی بنەرەتدا بدۆزەوه.

2 خاڵەکانی پوونکردنەوهی نەخشەکە بدۆزەوه کە لێکەوت تێیدا ئاسۆییە.

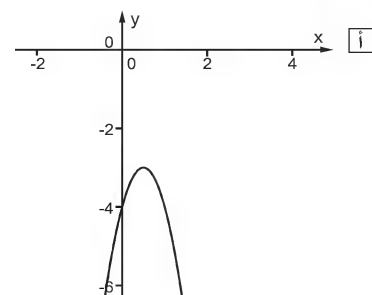
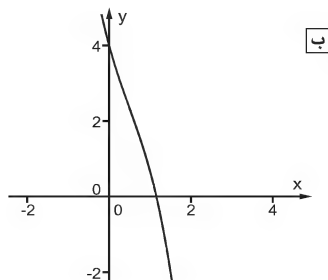
3 ئەگەر نەخشەی $g(x)$ پاسادانی $g(1) = 0$ و $g'(1) = -1$ بکات بەهای $h'(1)$ کە $h = f \circ g$ بدۆزەوه.

2-3 ✓ بەردەوامی

4 دیاربکە نەخشەی $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & x \geq 1 \\ 3x - 1 & x < 1 \end{cases}$ بەردەوامو توانای داتاشراوی لە $x = 1$ نییە.

2-3 ✓ نەخشەو داتاشراوەکانی

5 دوو وێنەکەیی خوارووە وێنەیی پوونکردنەوهی نەخشەی f و داتاشراوەکەیی f' دەنویست.



1 کامیان وێنەیی پوونکردنەوهی f و کامیان وێنەیی پوونکردنەوهی f' دەنویست؟ بەلگە بۆ وەلامەکەت بەهێنەوه.

2 ھاوکیشەیی لێکەوتی پوونکردنەوهی f لە $x = 0$ بدۆزەوه.

داتاشراوی خوځه خو و داتاشراوه بهرزهکان

Implicit Differentiation and Higher Derivative

لهپولی ده شارهای نهخشه بویت، بینیت که پیناسهکردنی نهخشه بهزوری بهشپوهی ناشکرا دهکرتیت تهویش به نووسینی گورپای پهپوهستی y بهپیی گورپای نازادی x وهک $y = 3x^2 - 5$ ، بهلام هندیک نهخشه بهشپوهی خوځه خو دیاریدهکرتیت به پهپوهندییهک دوو گورپاوهکی پاسادان دهکهن، وهک $xy = 1$ تهگهر لهم نمونهیه داوات لیکرا داتاشراوی y وهک نهخشهیهک بهپیی x بدوزیتهوه سهرتا y بهپیی x دهنووسیت پاشان ریساکانی داتاشراو بهکاردهینیت.

$$xy = 1 \Rightarrow y = \frac{1}{x} = x^{-1} \Rightarrow y' = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$$

بهلام نووسینی y بهپیی x ههمووکات کاریکی ناسان نییه، بۆ نمونه پهپوهندی $x + y^3 = \sqrt{x + y}$ لهم باراندا بۆ دوزینهوهی y' پهناده بهینه بهر داتاشراوی خوځه خو. بۆ تهوهی داتاشراوی خوځه خو تیښگهیت لهبیرت بیت داتاشراو بهپیی گورپای x وهرهگرین بۆ دوزینهوهی y' ، پاشان ئهم هنگاونه پهپوهیکه.

- داتاشراوی ههرلایهک بهپیی گورپای x وهرهگره.
- دانانی ئه و پادانوی y' لهخودهکرتیت لهلایهک و پادهکانی دیکه لهلایهکهی تر.
- تهو لایهکی y' لهخودهکرتیت شیتلهیکه.
- y' ههژماریکه بهپیی x و y .

نامانجهکان

- جیاوازی لهنیوان نووسینی شپوهی خوځه خو و نووسینی شپوهی ناشکرا دهکات.
- داتاشراوی خوځه خو بۆ دوزینهوهی داتاشراوی نهخشه بهکاردهینیت.
- بارهکانی ههژمارکردنی نامانجی نادیار جیاوهکاتهوه.
- سهلمینراوی لوپیتال بۆ دوزینهوهی باری نامانجی نادیار بهکاردهینیت.

نمونه 1 داتاشراوی خوځه خو

y' بدوزنهوه که $y^2 = x$.

شیکار

به بهکارهینانی ریسیاهکانی داتاشراو، داتاشراوی ههرلایهکی هاوکیشهک بهپیی گورپای x ههژماریکه، پاشان بههای y' بدوزنهوه.

$$(y^2)' = (x)' \Rightarrow 2yy' = 1 \Rightarrow y' = \frac{1}{2y}$$

زاراوهکان

Vocabulary

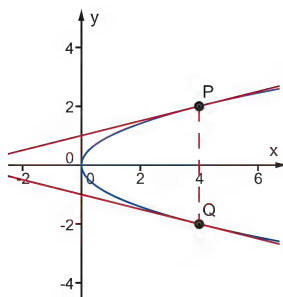
شپوهی خوځه خو
Implicit Form
شپوهی ناشکرا
Explicit form

داتاشراوی خوځه خو
Implicit differentiation

داتاشراوی دووهم
Second derivative

داتاشراوه بهرزهکان
High -Order derivative

باری نادیار
Indeterminate Form



1. y' بدوزنهوه کاتی که $y^3 + y^2 - 5y - x^2 = -4$.



له نمونهی 1 دا تهو برهی دهکاته y' گورپاوهکانی y و x لهخودهکرتیت تهمه نهک ههرشیاوه بهلکو بهسودیشه، بۆ نمونه بۆمان دهردهخت که تهو وینه پوونکردنهوهی پهپوهندی $y^2 = x$ دهنوینیت بریتییه له برهیهکی هاوتا و دوو لیکهوتی جیاوازی له $x = 4$ ها، هیه، یهکهمیان لهخالی $(4, -2)$ و لارییهکی $y' = \frac{1}{2(-2)} = -\frac{1}{4}$ و دووهمیان لهخالی $(4, 2)$ و لارییهکی $y' = \frac{1}{2(2)} = \frac{1}{4}$ زور جار له داتاشراوی خوځه خو بههای y' دهستهکهوینت وهک بریک که x و y لهخودهکرتیت.

نمونه 2

دۆزینه‌وه‌ی لاری لیکه‌وتی بازنه

لاری لیکه‌وتی بازنه‌ی $x^2 + y^2 = 25$ له‌خالی $(3, -4)$ دا بدۆزه‌وه.

شیکار

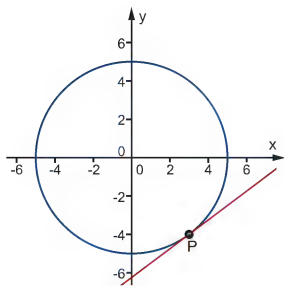
به‌کاره‌ینانی داتاشراوی خۆبه‌خۆ y' بدۆزه‌وه.

$$(x^2 + y^2)' = (25)' \Rightarrow 2x + 2yy' = 0 \Rightarrow y' = \frac{-2x}{2y} = -\frac{x}{y}$$

پاشان به‌های y' له $x = 3$ و $y = -4$ هه‌ژماریکه.

$$y' = -\frac{3}{(-4)} = \frac{3}{4}$$

لاری لیکه‌وتی بازنه‌ی $x^2 + y^2 = 25$ له‌خالی $(3, -4)$ ده‌کاته $\frac{3}{4}$.



2. لاری لیکه‌وتی بازنه‌ی $x^2 + y^2 = 16$ له‌خالی $(0, 4)$ بدۆزه‌وه.



تییینیکه داتاشراوی خۆبه‌خۆ سه‌ره‌پای ئاسانی دۆزینه‌وه‌ی، ده‌بیته هۆی نووسینی y' به‌شیوه‌ی برێک که هه‌ژمارکردنی به‌ها ژماره‌یه‌که‌ی له‌هه‌ر خالێک له‌خاله‌کانی پروونکردنه‌وه‌که‌ی ئاسان بێت.

نمونه 3

لیکه‌وتی برێگی ناته‌واو و ئه‌ستوون له‌سه‌ری

لاری لیکه‌وتی برێگی ناته‌واوی $x^2 - xy + y^2 = 7$ ولاری ئه‌ستوون له‌سه‌ری له‌خالی $(-1, 2)$ بدۆزه‌وه.

شیکار

به‌کاره‌ینانی داتاشراوی خۆبه‌خۆ y' بدۆزه‌وه.

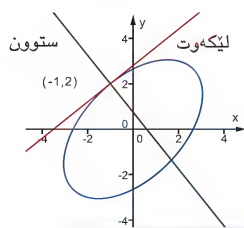
$$(x^2 - xy + y^2)' = (7)' \Rightarrow 2x - y - xy' + 2yy' = 0 \Rightarrow (2y - x)y' = y - 2x \Rightarrow y' = \frac{y-2x}{2y-x}$$

پاشان به‌های y' بدۆزه‌وه کاتی که $x = -1$ و $y = 2$

$$y' = \frac{(2) - 2(-1)}{2(2) - (-1)} = \frac{4}{5}$$

لاری لیکه‌وت ده‌کاته $\frac{4}{5}$ ولاری ئه‌ستوون له‌سه‌ری

ده‌کاته $-\frac{5}{4}$.



3. لاری لیکه‌وتی برێگی ناته‌واوی $4x^2 - 8xy + 9y^2 = 16$ ولاری ئه‌ستوون

له‌سه‌ری له‌خالی $(-2, 0)$ بدۆزه‌وه.



داتاشراوه بهرزهکان

ټهگه f نهخشهیه که بیت توانای داتاشراوی هه بیت، ټهوا داتاشراوه که ش نهخشهیه و لهوانهیه توانای داتاشراوی هه بیت، ټهگه داتاشراوه که f' نهخشهیه که بیت توانای داتاشراوی هه بیت ټهوا به داتاشراوه که دوتریت داتاشراوی دووهمی نهخشهیه f و بهیماي f'' هیما ده کریت لهم باره دا به f' دوتریت داتاشراوی یه کهم.

داتاشراوی دووهم به نمونهیه که له داتاشراوه بهرزهکان داده نریت ده توانیت هه ژماری داتاشراوی نهخشه له هه ر پلهیه که بکهیت (ټهگه هه بیت) له بهر ټهوه داتاشراوی سییم بریتیه له داتاشراوی داتاشراوی دووهم، داتاشراوه بهرزهکانی نهخشهیه $y = f(x)$ ده کاته:

$\frac{d}{dx}[f(x)]$	$\frac{dy}{dx}$	$f'(x)$	y'	داتاشراوی یه کهم
$\frac{d^2}{dx^2}[f(x)]$	$\frac{d^2 y}{dx^2}$	$f''(x)$	y''	داتاشراوی دووهم
$\frac{d^3}{dx^3}[f(x)]$	$\frac{d^3 y}{dx^3}$	$f'''(x)$	y'''	داتاشراوی سییم
$\frac{d^4}{dx^4}[f(x)]$	$\frac{d^4 y}{dx^4}$	$f^{(4)}(x)$	$y^{(4)}$	داتاشراوی چوارهم
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
$\frac{d^n}{dx^n}[f(x)]$	$\frac{d^n y}{dx^n}$	$f^{(n)}(x)$	$y^{(n)}$	داتاشراوی پلهی n

دوژینه و دی داتاشراوه پله بهرزهکان

داتاشراوی سییمه نهخشهیه $f(x) = x \sin x$ بدوژنه وه.

شیکار

$$f'(x) = (x \sin x)' = \sin x + x \cos x$$

داتاشراوی یه کهم

$$f''(x) = (\sin x + x \cos x)' = \cos x + \cos x - x \sin x = 2 \cos x - x \sin x$$

داتاشراوی دووهم

$$f'''(x) = (2 \cos x - x \sin x)' = -2 \sin x - \sin x - x \cos x = -3 \sin x - x \cos x$$

داتاشراوی سییم

4. داتاشراوی سییمه نهخشهیه $f(x) = x \cos x$ بدوژنه وه.



نادیاری له ئامانجی نهخشه

له هه ژمارکردنی ئامانجهکان له بارانهی که ئامانج به شیوهی 0 یا ∞ دهرده که ویت تو له بهرام بهر باریک له بارهکانی ئامانجی نادیری، له پیشت هر ویت نادیری ئامانج به جبهه بری لایبهیت به دوو باره نووسینه وهی نهخشهیه که نادیاره که نه می نیت.

لابردنی نادیری له هه ژمارکردنی ئامانج

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x - \sqrt{x}}$$

شیکار

ئاشکرایه جیهه جیکردنی پړسای دابهش بو هه ژمارکردنی ټهوا ئامانجه ده بیت بهر یکی نادیری

وهک 0 ، ده توانین دوو باره نهخشهیه بنووسینه وه و ئامانجه که بهم شیوهیه خواره وه

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x - \sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(x + \sqrt{x})}{(x - \sqrt{x})(x + \sqrt{x})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(x + \sqrt{x})}{x^2 - x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \sqrt{x}}{x - 1} = 0$$

5. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^2 - 2}{x + 1}$ بدۆزهوه.



بهکارهینانی جهبر بۆ لابردهنی باری نادیار لهزۆر باردا کاریکێ ئاسان نییه بۆ، نموونه $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$ لهم باردا پهنا بۆ بهکارهینانی سهلمینراوی لۆبیتال دههین.

سهلمینراوی 3-8 سهلمینراوی لۆبیتال

f و g دوو نهخشهێن توانای داتاشراویان له هاوسییهکانی $x=c$ ههیه $g'(x) \neq 0$ تهگه $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)}$ لهباری نادیار $\frac{0}{0}$ یان $\frac{\infty}{\infty}$ تهوا.

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

نموونه 6

بهکارهینانی سهلمینراوی لۆبیتال

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$ بدۆزهوه.

شیکار

ئاشکرایه جیبهجیکردنی پرسی دابهش دهبیته باری نادیار $\frac{0}{0}$.

سهلمینراوی لۆبیتال بهکارینه.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin x)'}{(x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{1} = \lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1$$

6. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x}$ بدۆزهوه.



ئههمهش باریکی تره له بارهکانی نادیار لهشیوهی $\frac{\infty}{\infty}$ لهم بارهشدا سهلمینراوی لۆبیتال جیبهجیدهکهین.

نموونه 7

باری $\frac{\infty}{\infty}$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x}$ بدۆزهوه.

شیکار

ئاشکرایه جیبهجیکردنی پرسی دابهش دهبیته باری نادیار $\frac{\infty}{\infty}$ چونکه $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$ سهلمینراوی لۆبیتال.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)'}{(x)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

7. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x}$ بدۆزهوه.



لهوانهیه سهلمینراوی لۆبیتال زیاتر له جارێک بهکاربهێنیت.

نموونه 8

جیبهجی کردنی لۆبیتال زیاتر له جارێک

$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{e^{-x}}$ بدۆزهوه.

شیکار

ئاشکرایه جیبه جیکردنی پړسای ئه نجامی دابهش ده بیته باری نادیارى $\frac{\infty}{\infty}$ چونکه
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} (e^{-x}) = +\infty$ سهلمینراوی لۆبیتال به کار بهیته.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{e^{-x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(x^2)'}{(e^{-x})'} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{-e^{-x}} \rightarrow \frac{\infty}{\infty}$$

سهلمینراوی لۆبیتال جاریکی تر به کار بهیته.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{-e^{-x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(2x)'}{(-e^{-x})'} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{e^{-x}} = 0$$

8. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2}$ بدۆزهوه.



راهینان

3-3

له راهینانی 1 تا 4، y' بدۆزهوه به پێی x, y .

1 $x^2y + xy^2 = 6$ 2 $y^2 = \frac{x-1}{x+1}$ 3 $x = \tan y$ 4 $x + \tan(xy) = 0$

له دوو راهینانی 5 و 6 دا، y' ولاری چهماوه که له خالی دیاریکراو بدۆزهوه.

5 $x^2 + y^2 = 13$ at $(-2, 3)$ 6 $(x+2)^2 + (y+3)^2 = 25$ at $(1, -7)$

له دوو راهینانی 7 و 8 دا دیاریکه که ی لاری چهماوه که پێناسه کراو ده بیته.

7 $x^2y - xy^2 = 4$ 8 $x^3 - y^3 = xy$

له راهینانی 9 تا 12 لاری لیکهوت و ئهستوون له سهری له خالی دیاریکراو بدۆزهوه.

9 $x^2 + xy - y^2 = 1$ at $(2, 3)$ 10 $x^2y^2 = 9$ at $(-1, 3)$

11 $6x^2 + 3xy^2 + 2y^2 + 17y - 6 = 0$ at $(-1, 0)$ 12 $y = 2 \sin(\pi x - y)$ at $(1, 0)$

له راهینانی 13 تا 18 داتاشراوی دووهمی نهخشه که بدۆزهوه.

13 $f(x) = 4x^{\frac{3}{2}}$ 14 $f(x) = x + 32x^{-1}$ 15 $f(x) = \frac{x}{x-1}$

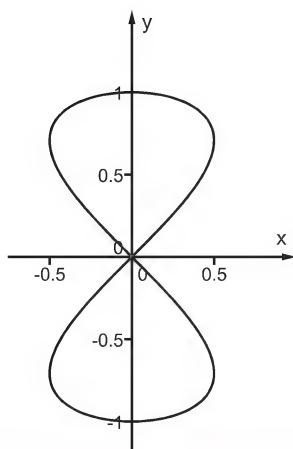
16 $f(x) = \frac{x^2 + 2x - 1}{x}$ 17 $f(x) = 3 \sin x$ 18 $f(x) = \frac{1}{\cos x}$

له راهینانی 19 تا 22 داتاشراوی داواکراو بۆ نهخشه که بدۆزهوه که یه کێک له داتاشراوه که ی دراوه.

19 $f'(x) = x^2$: $f''(x)$ بدۆزهوه. 20 $f''(x) = 2 - \frac{2}{x}$: $f'''(x)$ بدۆزهوه.

21 $f'''(x) = 2\sqrt{x}$: $f^{(4)}(x)$ بدۆزهوه.

22 $f^{(4)}(x) = 2x + 1$: $f^{(6)}(x)$ بدۆزهوه.



23 پروونکردنه‌وهی هه‌شتی

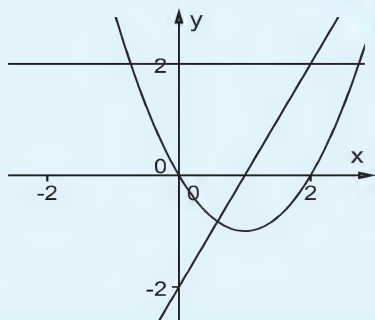
چه‌ماوهی به‌رام‌بهر هاوکێشه‌ی $y^4 = y^2 - x^2$ ده‌نۆینێت، دوو لاری ئه‌و چه‌ماوه‌یه‌یه له خاله‌کانی $(\frac{\sqrt{3}}{4}, \frac{1}{2})$ و $(\frac{\sqrt{3}}{4}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ بدۆزه‌وه.

ده‌رباره‌ی چه‌مکه‌کان

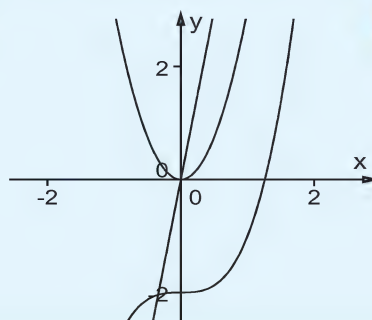
24 جیاوازی نیوان شیوه‌ی خۆبه‌خۆ و شیوه‌ی ئاشکرا له پێناسه‌ی په‌یوه‌ندی نیوان x و y پروونیکه‌وه، نمونه‌ی بۆ هه‌ر یه‌کێکیان به‌پێنه‌وه.

25 به‌شیوازی خۆت له‌سه‌ر هه‌نگاوه‌کانی داتا‌شراوی خۆبه‌خۆ باسیک بنوسه.

له دوو راهێنانی 26 و 27 وینه‌ی پروونکردنه‌وه‌ی نه‌خشه‌ی f و پروونکردنه‌وه‌ی داتا‌شراوی یه‌که‌م f' و داتا‌شراوی دووهم f'' ده‌رده‌که‌وی‌ت، دیاریکه‌ کام له‌م سێ پروونکردنه‌وانه پروونکردنه‌وه‌ی نه‌خشه‌که‌یه و کامیان وینه‌ی پروونکردنه‌وه‌یی داتا‌شراوی یه‌که‌مه و کامیان پروونکردنه‌وه‌یی داتا‌شراوی دووهمه، دیاریکه‌ چۆن پروونکردنه‌وه‌کانت دۆزییه‌وه.



27



26

راست یان هه‌له؟ له راهێنانی 28 تا 30 دیاریکه ئه‌گه‌ر رسته‌که راسته هۆیه‌که‌ی لیک‌بده‌وه یان ئه‌گه‌ر هه‌له‌یه به‌ دژه نمونه‌یه‌که بیسه‌لمی‌نه.

28 ئه‌گه‌ر $\frac{d^5 y}{dx^5} = 0$ ئه‌وا $y = (x+1)(x+2)(x+3)(x+4)$

29 ئه‌گه‌ر f نه‌خشه‌یه‌کی پاده‌دار بێت له‌په‌له‌ی n ئه‌وا $f^{(n+1)}(x) = 0$.

30 داتا‌شراوی دووهمی نه‌خشه، تیکرای گۆرانی داتا‌شراوی یه‌که‌م ده‌نۆینێت.

31 داتا‌شراوی یه‌که‌می نه‌خشه‌ی $f(x) = x|x|$ بدۆزه‌وه، ئایا $f''(0)$ پێناسه‌کراوه؟

32 بیریکه‌وه f و g دوو نه‌خشه‌ن توانای داتا‌شراویان هه‌یه له‌هه‌ر به‌هایه‌که له به‌هایه‌کانی x .

کام له‌وانه دێن راسته؟

$$fg'' - f''g = (fg' - f'g)' \quad \text{a}$$

$$fg'' + f''g = (fg)'' \quad \text{b}$$

له راهیتانی 33 تا 35 یهکهمجار به دووباره نووسینهوهی نهخشهکهو پاشان به بهکارهیتانی سهلمیتراوی لوبیتال نامانچ بدوزوه.

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3} \quad 35$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^2-x-3}{x+1} \quad 34$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2(x-3)}{x^2-9} \quad 33$$

له راهیتانی 36 تا 44 نامانچ بدوزوه.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x-(1-x)}{x} \quad 38$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4-x^2}-2}{x} \quad 37$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-x-2}{x-2} \quad 36$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2-2x+1}{2x^2+3} \quad 41$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{\sin bx} \quad 40$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x^2}{x^2-1} \quad 39$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x^4}{x^3} \quad 44$$

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin x}{x-\pi} \quad 43$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \quad 42$$

دوباره ی چمهکهکان

45 ئهگەر L لیکهوتی چهماوهی $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{c}$ بیټ. بسهلمینه سهرجهمی یهکترپرینی ئهو راستههیلله لهگهل تهوهری پوتانهکان دهکاته c .

46 داتاشراوی خو بهخو بهکاربهینه بو ئهوهی بیسهلمینیت داتاشراوی $f(x) = x^{\frac{p}{q}}$ که $\frac{p}{q}$ ژمارهیهکی ریژهیه دهکاته $f'(x) = \frac{p}{q} x^{\frac{p}{q}-1}$

47 نهخشهی خیرایی m/s تهنیکی جولاو دهکاته $v(t) = 36 - t^2$ مهتر له چرکهیهکدا که $0 \leq t \leq 6$. خیرایی و تاودانی تهنهکه له $t = 3$ بدوزوه، کاتیک خیرای و تاودان له نیشانهدا دژ بن خیرایی تهنهکه چ دهگهینیت؟

48 تو دهزانیت که راستههیللی ئهستوون لهسهر لیکهوتی بازنه لهخالی لیکهوت بهچهقی بازنهکهدا دهروات، ئهمه به بهکارهیتانی بازنه $x^2 + y^2 = r^2$ و خالیکی سهری $P(a, b)$ بسهلمینه.

i) هاوکیشهی لیکهوتی بازنهکه لهخالی P دا بدوزوه.

ب) هاوکیشهی راستههیللی ئهستوون لهسهر لیکهوتهکه لهخالی P دا بدوزوه، وبسهلمینه بهچهقی بازنهکهدا دهروات.

تیکرای گۆرانهکان Rates of Change

4-3

تیکرای گۆرانهکان

فیربوییت چۆن داتاشراو بۆ دۆزینەوهی لاری له خالێک له خالەکانی پروونکردنەوهکە ی بەکاربەھێنێت، لەم وانەیدا فیردەبیت چۆن داتاشراو بۆ دۆزینەوهی تیکرای گۆران بۆ گۆراویکی دیاریکراو بەپێی گۆراویکی تر بەکاردەھێنێت، تیکرای گۆرانهکان لەزۆر بوار بەکاردیئ وەک لیکۆلینەوهی زیادبوونی ژمارە ی دانیشتوان و تیکرای بەرھەمھێنان و تیکرای دەرچوونی ئاو و خیرایی و تاودان.

لیکۆلینەوهی جولانی تەنێک لەسەر راستەھێلێکی (ئاسۆیی یان ستوونی)، دیارترین بەکارھێنانەکانی تیکرای گۆرانه، تەوهری ئاسۆیی و خالی بنەپەتی سەر تەوهرەکە زۆربە ی جار بەکاردەھێنرێت وەک نموونە ی راستەھێلێک کە تەنێک بە ئاسۆیی لەسەری دەجولێت. لەم بارەدا جولانەکە بە ئاراستە ی مۆجەب دادەنرێت ئەگەر لە چەپەووە بۆ راست بێت و ئاراستەکە ی بە سالب دادەنرێت ئەگەر لە راستەووە بۆ چەپ بجولێت، نەخشە ی لادان بریتی یە لە نەخشە ی s کە شوینی تەنێک لە خالی بنەپەت بەپێی کات t دیاریدەکات ئەگەر تەنەکە لەماوہ ی Δt دووری $\Delta s = s(t + \Delta t) - s(t)$ بپرێت ئەوا بەپرێژە ی:

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \text{گۆرانی لادان} \\ \text{گۆرانی کات}$$

دەوتریت ناوہندە خیرایی Average velocity تەنێکی جولاو یان ناوہندە خیرایی لەماوہ ی $[t, t + \Delta t]$

جولە ی ئاسۆیی

داتاشراو پۆلێکی گرنگ لە لیکۆلینەوهی جولانی تەنەکان دەبێنێت، کاتی کە تەنێک دەجولێت ئەوا شوینەکە ی بە گۆرانی کات دەگۆرێت، ئەگەر بە ئۆتۆمبیلەکە ت لەھەولێر بۆ دھۆک دەرچیت ئەوا شوینەکە ت لەھەر ساتێک بەپێی نەخشە ی لادانی $s(t)$ دیاریدەکرێت، وادابنێ تەنێک لەسەر راستەھێلێکی ئاراستەکراو دەجولێت کە دەتوانرێت بە تەوهری x دابنرێت تەنەکە لەماوہ ی t بۆ $t_1 = t + \Delta t$ لە شوینی $s(t)$ بۆ شوینی $s(t_1) = s(t + \Delta t)$ دەجولێت.

تیکرای خیرایی بۆ ئەو تەنە لەماوہ ی $[t, t_1]$ دەبێتە:

$$v_{av} = \frac{\text{گۆرانی شوین}}{\text{گۆرانی کات}} = \frac{s(t_1) - s(t)}{t_1 - t} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

کاتی کە $\Delta(s) = s(t + \Delta t) - s(t)$

ئەگەر بتهوێت خیرایی تەنەکە لە ساتی t بدۆزیتەووە ئەوا بەدوای $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}$ بگەرێ، واتە بەھای داتاشراوی نەخشە ی لادان لە ساتی t بدۆزەووە.

ئامانجەکان

- داتاشراو بۆ دۆزینەوهی تیکرای گۆرانهکان بەکاردەھێنێت.
- تیکرای گۆرانهکان بۆ شیکارکردنی پرسیارەکانی ژيانی پۆژانە بەکاردەھێنێت.

زاراوەکان

Vocabulary

- نەخشە ی لادان
Position function
- خیرایی ئاراستەکراو
Velocity
- بری خیرایی
Speed
- ناوہندە خیرایی
Average velocity
- خیرایی ساتی
Instantaneous velocity
- تیکرای گۆران
Rate of change

خیرایی ساتی Instantaneous Velocity

خیرایی ساتی تهنیکی جولاًو دهکاته داتاشراوی نهخشهی لادانی جولانی ئەو تهنه له ساتی t دا

$$v(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{s(t+\Delta t) - s(t)}{\Delta t} = s'(t)$$

ههژمارکردنی خیرایی ساتی تهنیک له سهر تهوهریهك دهجولیت

خالیك له سهر تهوهری x دهجولیت. نهخشهی $s(t) = t^2 - 5t + 4$ لادانی تهنهكه دهنوینیت کات t به چرکهو لادان s به مهتر دهپۆریت، ناوهنده خیرایی خالیهكه له ماوهی دوو چرکهی یهکهمداد بدۆزهوه پاشان خیرایی ساتی له $t = 2$ بدۆزهوه.

شیکار

بۆ دۆزینهوهی ناوهنده خیرایی خالیهكه له ماوهی دوو چرکهی یهکهمداد ئەو دوورییهی خالیهكه لهو ماوهیهدا بریویهتی بدۆزهوه ئەو دووریه دهکاته.

$s(2) - s(0) = (2)^2 - 5(2) + 4 - [(0)^2 - 5(0) + 4] = 4 - 10 = -6$
خالیهكه له ماوهی دوو چرکهدا، 6 مهتری به ئاراستهی سالب له سهر تهوهرهكه بریوه، بۆیه ناوهنده خیرایی دهپۆته 3 مهتر له چرکهیهکدا به ئاراستهی سالب -3m/s ، بۆ دۆزینهوهی خیرایی ساتی خالیهكه له $t = 2$ به های داتاشراوهكه $s'(t)$ له $t = 2$ بدۆزهوه.

$$s'(2) = 2(2) - 5 = -1 \quad \text{و} \quad s'(t) = 2t - 5$$

تیبینی بکه ئەو خیراییه دۆزیتهوه تهنه ئەو خیراییه ناگهیهنیت که خالیهكه پتی دهجولیت، به لکو ئاراستهکهشی دیاریدهکات، بۆیه پتی دهوتریت خیرایی ئاراستهکراو. به لام بری خیراییهکه به های پروتی خیراییه ئاراستهکراوهکهیه بۆیه خیرایی ئاراستهکراوی خالیهكه له $t = 2$ دهکاته -1m/s یان یهك مهتر له چرکهیهکدا به ئاراستهی سالبی تهوهرهکه، وبری خیراییهکه دهکاته یهك مهتر له چرکهیهکدا.

1. ناوهنده خیرایی ئاراستهکراوی خالیك له ماوهی $t_1 = 3$ بۆ $t_2 = 7$ چهنده؟ خیرایی ساتی ئاراستهکراو له $t = 5$ چهند بووه؟ $s(t) = t^2 - 5t + 4$



خیرایی نهخشیهکه به پپی کات و به تپهریوونی کات دهگۆریت، داتاشراوی خیرایی چۆنیهتی گۆران دهگهینیت، وهك چۆن خیرایی گۆرانی شوین دهگهینیت، داتاشراوی خیرایش چۆنیهتی گۆرانی خیرایی دهگهینیت، تاودان بریتییه له داتاشراوی خیرایی، بۆ دۆزینهوهی تاودان دووجار داتاشراوی نهخشهی لادان وهریگره، واته داتاشراوی دووهمی نهخشهی لادان بدۆزهوه.

نهخشهی لادان

$$s(t)$$

نهخشهی خیرایی

$$v(t) = s'(t)$$

نهخشهی تاودان

$$a(t) = v'(t) = s''(t)$$

نمونه 2

هەژمارکردنی تاودانی تەنیک لەسەر تەوەرەیهە دەجولیت

بە گەرانهوه بۆ پێدراوهکانی نموونه 1 ، تاودانی خالەکه لە $t = 5$ بدۆزەوه.

شیکار

بۆ دۆزینەوهی تاودانی خالەکه داتاشراوی دووهمی نەخشەى لادان بدۆزەوه.

$$v(t) = s'(t) = 2t - 5$$

$$a(t) = s''(t) = 2$$

تاودانی تەنەکه جیگیره و ناگۆریت و دەکاتە 2m/s^2 .

2. تاودانی خالەکه لە $t=6$ چەندە؟ $s(t)=t^2-5t+4$



جولەى ستوونى

نەخشەى لادان لە جولەى ستوونى بەرزى تەنیک لە پرووی زەوى دەنوییت، بە وادانان که تەنەکه لەسەر راستەهێڵیکى ستوونى بۆ سەرەوه ئاراستەکراوه دەجولیت، دەتوانریت بە تەوهرى y دابنریت لە ئەنجامى توێژینەوه تاقیکردنەوهییهکان و تیۆرییهکان دەرکەوتوو که نەخشەى $s(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0t + s_0$.

نەخشەیهە دەنوییت بۆ توێژینەوهی بەرزى تەنیک لە پرووی زەوییهوه بە تێپەرپوونى کات t لەساتى دەرچوونیدا پاش فرێدانى لەبەرزى سەرەتایى s_0 بەخیرایى سەرەتایى v_0 ، g لەو نەخشەیه تاودانى زەوى دەنوییت، بەهەیههەى جیاواز دەبیت بە جیاوازی یهکهى بەکارهاتوو بۆ پێوانى دوورییهکه.

نەخشەى جولەى ستوونى

نەخشەکه	بەهای g	یهکهى پێوانى خیرایی	یهکهى پێوانى دوورى
$s(t) = -4.9t^2 + v_0t + s_0$	$g = 9.8\text{m/s}^2$	m/s	مەتر m
$s(t) = -16t^2 + v_0t + s_0$	$g = 32\text{ft/s}^2$	ft/s	پى ft

نمونه 3

بەکارهێنانى داتاشراو بۆ دۆزینەوهى خیرایی

لە ئاهەنگیکى یارى ئاگریندا تیریک لەسەر پایهیهە که 4 پى لەسەر پرووی زەوى بەرزە بەرهو سەرەوه هەلدا بەخیرایی سەرەتایى برهکهى 160 پى لە چرکهیهەدا.

ا) نەخشەى لادانى جولەى تیرەکه بنووسه.

ب) ئەوپەرى بەرزى تیرەکه دەگاتى چەندە؟

ج) خیرایی ئاراستەکراوى تیرەکه کاتیک دەگاتە بەرزى 260 پى لەبەرزبونهوه و هاتنه خواروهیدا چەندە؟

د) تاودانى تیرەکه لەهەر ساتیکدا چەندە؟

ه) کهى تیرەکه دەکەوێتەوه سەر زەوى؟

شیکار

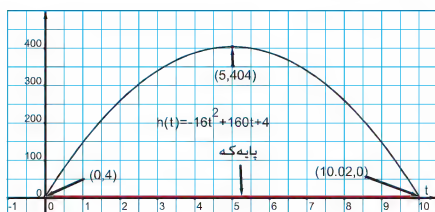
ا. به پئی زانیارییهکانی پیشوو، نهخشه‌ی لادانی جولئی تیره‌که ده‌بیته $s(t) = -16t^2 + 160t + 4$

ب. کاتیک خیرایی تیره‌که ده‌بیته سفر تیره‌که ده‌گاته ئه‌وپه‌پری به‌رزی، خیرایی ئاراسته‌کراوی تیره‌که به‌پئی کات ده‌کاته $v(t) = s'(t) = -32t + 160$. ئه‌و خیرایییه ده‌بیته سفر کاتیک به‌های t ده‌بیته ره‌گی هاوکیشه‌ی $-32t + 160 = 0$ واته $t = 5$ ، له‌مه‌وه درده‌جیت ئه‌وپه‌پری به‌رزی تیره‌که ده‌یگاتی ده‌کاته $s(5) = -16(5)^2 + 160(5) + 4 = 404 \text{ ft}$

ج. بۆ دۆزینه‌وه‌ی خیرایی ئاراسته‌کراوی تیره‌که کاتیک به‌رزییه‌که‌ی ده‌بیته 260

پئی، پیوسته به‌های v له‌و به‌رزییه‌دا بدۆزیته‌وه

هاوکیشه‌ی $-16t^2 + 160t + 4 = 260$ شیکاربه‌که.



$$-16t^2 + 160t + 4 = 260$$

$$16t^2 - 160t + 256 = 0$$

$$16(t-2)(t-8) = 0$$

ئه‌م هاوکیشه دوو ره‌گی هه‌یه $t = 2$ و $t = 8$ ، به‌رزی تیره‌که ده‌گاته 260 پئی له کاتی به‌رزبوونه‌وه‌یدا له $t = 2$ که تئیدا خیرایییه ئاراسته‌کراوه‌که‌ی ده‌بیته به‌های داتاشراوی نه‌خشه‌که، واته $v(2) = -32(2) + 160 = 96 \text{ ft/s}$ هه‌روه‌ها تیره‌که ده‌گاته ئه‌و به‌رزییه له‌هاتنه خواره‌وه‌یدا کاتیک $t = 8$ تئیدا خیرایی ئاراسته‌کراو ده‌کاته $v(8) = -32(8) + 160 = -96 \text{ ft/s}$ ، ئه‌گهر تئیبینی هه‌ردوو خیرایی تیره‌که له‌به‌رزبوونه‌وه و هاتنه خواره‌وه‌یدا له‌به‌رزی 260 بکه‌ین له‌ بر‌دا یه‌کسان و خیرایییه‌که له به‌رزبوونه‌وه‌دا موجه‌ب و له‌هاتنه خواره‌وه‌یدا سالبه.

د. بۆ دۆزینه‌وه‌ی تاودانی تیره‌که داتاشراوی دووه‌می نه‌خشه‌ی لادان بدۆزه‌وه

$$a(t) = s''(t) = -32$$

ه. تیره‌که ده‌گاته‌وه زه‌وی کاتیک به‌رزییه‌که‌ی ده‌بیته 0 واته کاتیک هاوکیشه‌ی

$$-16t^2 + 160t + 4 = 0$$

موجه‌به و ده‌کاته 10 به‌نزیکه‌یی. تیره‌که ده‌گاته‌وه زه‌وی پاش نزیکه‌ی 10 چرکه له هه‌لدانی.

3. وه‌لامی پرسپاره‌کانی نمونه‌ی 3 بده‌وه ئه‌گهر وادانرا تیره‌که له‌به‌رزی 2.4m

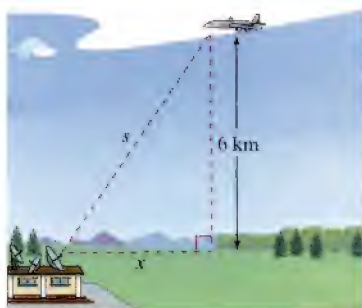
هه‌لدرا به‌خیرایی سهره‌تایی 49m/s و له‌پرسپاری لقی ج خیرایی

ئاراسته‌کراوی تیره‌که کاتیک له‌به‌رزی 120 m بیت بدۆزه‌وه؟



له جېبه جېكردنه گرنه گه كانى داتاشراوى خۇبەخۇ دۆزىنە وهى تېكپايى گۆپانى گۆپاويكه به پېيى گۆپاويكى تر كاتيك هەردوو كيان نەخشە بن به پېيى كات.

دۆزىنە وهى خېرايى فرۆكه به وهى رادار «بۆ تېروانين»



فرۆكه يهك به هيليكى ئاسويى به سەر وېستگه راداريك تېپه پده بېت، وهك له وېنهى به رامبه رپوونكر اوته وه خېرايى ئاراسته كراوى فرۆكه كه چهنه كاتيك له دوورى $s = 10\text{ km}$ له وېستگه راداره كه دووره، ئه گهر زانیت دوور يه كهى s به تېكپايى 400 km/h كه مېكات؟

شيكار

خېرايى ئاراسته كراوى فرۆكه كه به تېكپايى گۆپانى دوورى ئاسويى نيوان فرۆكه كه و شويى راداره كه ده پيو ريت، نەخشەى $x(t)$ ده بېته نەخشەى لادانى فرۆكه كه بويە داتاشراوى $x(t)$ بدۆزه وه.

له لايهكى تر گۆپاوه كانى x و t به پيه وهندى $x^2 + 6^2 = s^2$ به يهك ده به سترينە وه داتاشراوى خۇبەخۇ به كار به ئېنه بۆ دۆزىنە وهى $x'(t)$.

$$x^2 + 6^2 = s^2 \Rightarrow \frac{d}{dt}(x^2 + 6^2) = \frac{d}{dt}(s^2) \Rightarrow 2x \frac{dx}{dt} = 2s \frac{ds}{dt} \Rightarrow x \frac{dx}{dt} = s \frac{ds}{dt} \Rightarrow \frac{dx}{dt} = \frac{s}{x} \frac{ds}{dt}$$

كاتيك فرۆكه كه له دوورى $s = 10\text{ km}$ ، ئه و $x = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8$ و $\frac{ds}{dt} = -400$ له وه ده رده چيت $\frac{dx}{dt} = \frac{s}{x} \frac{ds}{dt} = \frac{10}{8}(-400) = -500$

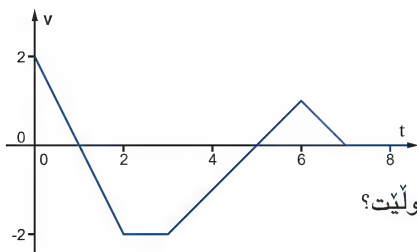
خېرايى ئاراسته كراوى فرۆكه كه، كاتيك 10 km له وېستگه راداره كه دووره ده كاته -500 km/h كه واته برى خېراييه كهى له و ساته دا ده بېته 500 km/h .

4. فرۆكه يهك له سەر هيليكى فرين كه به سەر وېستگه راداريك تېپه پده بېت ده فريت وهك له وېنه كهى نمونه 4 تېكپايى كه مكردى دوورى s چهنه؟ ئه گهر زانیت خېرايى ئاراسته كراوى فرۆكه كه له دوورى $s = 9\text{ km}$ بېت له وېستگه راداره كه بكاته -450 km/h .



1 **پووبەر** لاکیشیەك درٲیزیەكەى $2t+1$ و پانییەكەى \sqrt{t} بیٲ، تیكرای گۆرانی پووبەرى لاکیشەكە بە گۆرانی t بدۆزەوه.

2 **قەبارە** لوولەكێكى وەستاو نیوەتیرەى بىكەكەى $\sqrt{t+2}$ و بەرزییەكەى $\frac{1}{2}\sqrt{t}$ بیٲ، تیكرای گۆرانی قەبارەى لوولەكەكە بە گۆرانی t بدۆزەوه.



3 **جولەى ئاسۆیى** لەوێنەى بەرامبەر پوونکردنەوهى

نەخشەى $v = f(t)$ دەرەكەوٲت كە خٲرایى

ئاراستەكراوى خالێك لەسەر تەوهرى x دەنوٲیٲ.

ا كەى خالەكە بۆ دواوه دەجولٲت؟ كەى بۆ پٲشەوه دەجولٲت؟

كەى خٲرایییەكەى زیادەكات و كەى كەمدەكات؟

ب كەى تاودانى خالەكە موجهب، سالب، سفر دەبیٲ؟

ج كەى خالەكە بەئەو پەرى خٲرایى دەجولٲت؟

د كەى خالەكە بۆ ساتێك زیاتر لە جولەوه دەووستٲت؟

وا دابنى كە x و y دوو نەخشەن بەپٲى t و توانای داتاشارویان هەیه، بە بەكارهٲنانی پٲدراوێكە دواكراوێكەى بدۆزەوه.

پٲدراوێكە	دواكراوێكە	پەيوەندى نٲوان x و y	
$\frac{dx}{dt} = 3$	لە $x = 4$ $\frac{dy}{dt}$	$y = \sqrt{x}$	4
$\frac{dx}{dt} = 8$	لە $x = 3$ و $y = 4$ $\frac{dy}{dt}$	$x^2 + y^2 = 25$	5
$\frac{dy}{dt} = -2$	لە $x = 4$ و $y = 3$ $\frac{dx}{dt}$		

لە دوو راھٲنانی 6 و 7 دا خالێك لەسەر چەماوێ نەخشەى y كە دراوه دەجولٲت. $\frac{dy}{dt}$ بۆ هەر بەهائیەكى دیاریكراو بۆ x بدۆزەوه، ئەگەر زانیت لە $\frac{dx}{dt} = 2 \text{ cm/s}$.

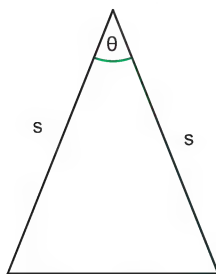
6 $x = 1, x = 0, x = -1, y = x^2 + 1$

7 $x = \frac{\pi}{3}, x = \frac{\pi}{4}, x = \frac{\pi}{6}, y = \sin x$

8 تیكرای گۆرانی دوورى نٲوان خالێك لەسەر برگیەى هاوتای $y = x^2 + 1$ دەجولٲت و خالى بنەرەت بدۆزەوه، ئەگەر زانیت كە $\frac{dx}{dt} = 2 \text{ cm/s}$.

9 تیكرای گۆرانی دوورى نٲوان خالێك لەسەر چەماوێ نەخشەى $y = \sin x$ دەجولٲت و خالى بنەرەت بدۆزەوه ئەگەر زانیت كە $\frac{dx}{dt} = 2 \text{ cm/s}$.

10 سڳوشه يه کي دوو لايه کسان دريڙي لايه ک له دوو لايه کسانه کي s و گۆشه ي نيوانيان θ بڼت.



1 ا بيسه لمپنه پووبهري سڳوشه ک دهکاته $A = \frac{1}{2} s^2 \sin \theta$

ب ټگر θ به ټگرپاي $\frac{1}{2}$ راديان له خوله کي کدا زياد بکات، ټگرپاي گۆراني پووبهري سڳوشه ک له $\theta = \frac{\pi}{6}$ و $\theta = \frac{\pi}{3}$ بدۆزهوه.

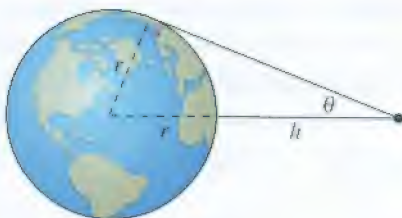
ج پوونبکوهه بۆچي ټگرپاي گۆراني پووبهري سڳوشه ک جڭير نييه، له کاتي کدا ټگرپاي گۆراني θ به جڭيري ده مينځته وه.

11 ټگرپاي گۆران ټگرپاي گۆراني به هايه ک بۆ x ټگر هه بوو له ماودي $[0, 2\pi]$ بدۆزهوه، که تيايدا ټگرپاي گۆراني ههريه ک له نه خشه کاني $f(x) = \frac{1}{\cos x}$ و $g(x) = \frac{1}{\sin x}$ يه کسان بن.

12 کاتيک مانگيکي دهستکرد چاودږي گۆي زهوي دهکات، چاودږي به شيکي دهکات، هه نديک لهو مانگه دهستکردانه له توانايدا يه گۆشي θ که له وينه ي خواره وه پوونکراوه ته وه بپيويټ که h دوری نيوان مانگه دهستکرده که و زهوي ده نوښنيټ و r نيوه تي ره ي گۆي زهوي ده نوښنيټ.

1 ا بيسه لمپنه که $h = r \left(\frac{1}{\sin \theta} - 1 \right)$

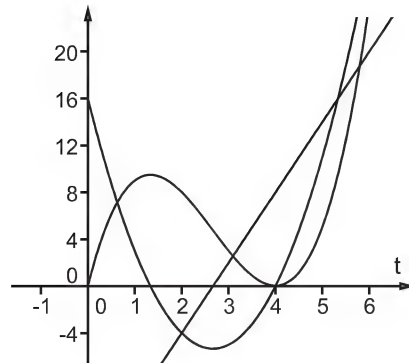
ب ټگرپاي گۆراني h به پي θ له $\theta = 30^\circ$ بدۆزهوه $r = 6373 \text{ km}$



دهرباره ي چه مکه کان

13 گۆراني x و y به پيوهندي $y = ax + b$ به يه کده به سترينه وه که a و b دوو ژماره ي راستين وادابني ههريه ک له گۆراوه کان نه خشه يه که به پي t و ټگرپاي گۆراني x نه گۆره، ئايا ټگرپاي گۆراني y ټويش نه گۆره؟ ټگر و ابو، ئايا ټگرپاي گۆرانه کي به ټگرپاي گۆراني x يه کسان ده بڼت؟ ټمه پوونبکوهه.

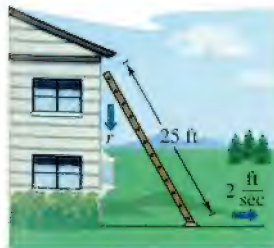
14 جوولہی گہرد لہوینہی بہرامبہر پروونکردنہوہی ہەر
نہخشہیہک لہ نہخشہکانی خیرایی و تاودانی جوولہی
گہردیک لہسەر تہوہرہیہک پروونکراوہتہوہ.



- ۱ وینہکە بکێشە و پروونکردنہوہی ہەر نہخشہیہک
جیابکەوہ. چۆن گەیشتی بہو ئەنجامە، پروونیہکەوہ.
۲ لہسەر ئەو وینہی کێشاوتہ دیاریہکە، کەی خیرایی
گہردکە زیاددەکات وکەی کەمدەکات.

15 بەرزە گۆشە بالۆنیک بەخیرایی 3 m/s بەرزەبێتہوہ بہ دەرچوونیک لہ خالیکی سەر زہوی کە
30 m لہ چاودیریک دوورہ، تیکرای گۆرانی بەرزە گۆشەکە بدۆزہوہ کاتیک بالۆنہکە 30 m لہسەر
پرووی زہوی بہرزبیت.

16 پەیزہیہک درێژیہکە 25 پییہ لای سەرہوہی لہسەر دیواریکە، ولای
خوارہوہی عارہبانہیہک بەخیرایی دوو پی لہ چرکەپەکدا رایدەکێشیت.



- ۱ خیرایی دابەزینی لای سەرہوہی پەیزہکە لہسەردیوارکە چەندہ
کاتیک لای خوارہوہی 7 پی، لہ دیوارکە دووربیت؟

- ۲ تیکرای گۆرانی پرووبەری ئەو سیگۆشەیی کە پەیزہکە لہگەل دیوارکە و زہوییہکە دروستی
دەکات بدۆزہوہ، کاتیک لای خوارہوہی پەیزہکە 7 پی لہ دیوارکەوہ دووربیت.

پیداچوونەوی بەش

لە راهیانی 1 تا 4 داتاشراوی هەر نەخشەیک بە بەکارهێنانی پێناسەی داتاشراو بدۆزەو.

4 $f(x) = \frac{2}{x}$

3 $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$

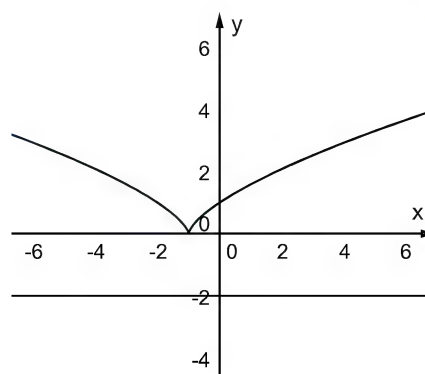
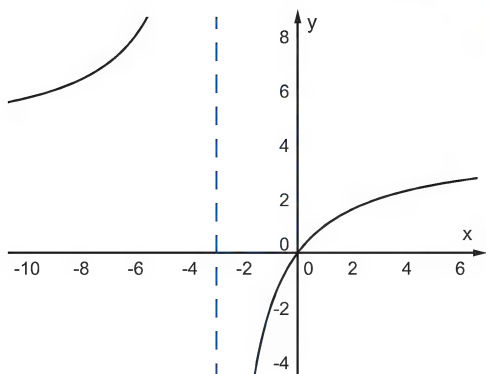
2 $f(x) = \sqrt{x} + 1$

1 $f(x) = x^2 - 2x + 3$

لە راهیانی 5 و 6 بەهایەکانی x وادەکات نەخشەیکە توانای داتاشراوی هەبێت دیاریکە.

6 $f(x) = \frac{4x}{x+3}$

5 $f(x) = (x+1)^{\frac{2}{3}}$



7 پروونکردنەوی نەخشە $f(x) = 4 - |x - 2|$ بکێشە.

ا ئایا نەخشەیکە لە $x = 2$ بەردەوامە.

ب ئایا نەخشەیکە توانای داتاشراوی لە $x = 2$ دا هەیە؟ وەلامەکەت پروونبکەو.

8 پروونکردنەوی نەخشە $f(x) = \begin{cases} x^2 + 4x + 2 & x < -2 \\ 1 - 4x - x^2 & x \geq -2 \end{cases}$ بکێشە.

ا ئایا نەخشەیکە لە $x = -2$ بەردەوامە.

ب ئایا نەخشەیکە توانای داتاشراوی لە $x = -2$ دا هەیە؟ وەلامەکەت پروونبکەو.

لە دوو راهیانی 9 و 10 دا لاری نەخشەیکە لە خالە دیاریکراوەکە بدۆزەو.

10 $\left(-2, -\frac{34}{4}\right)$ ؛ $h(x) = \frac{2}{8}x - 2x^2$

9 $\left(-1, \frac{5}{6}\right)$ ؛ $g(x) = \frac{2}{3}x^2 - \frac{x}{6}$

لە راهیانی 11 و 12 دا:

ا هاوکێشەی لیکەوتی پروونکردنەوی نەخشەیکە لە خالە دیاریکراوەکە بدۆزەو.

ب وێنەی پروونکردنەوی نەخشەیکە بکێشە و لیکەوت لە خالەکەدا بدۆزەو.

12 $(0, 2)$ ؛ $f(x) = \frac{2}{x+1}$

11 $(-1, -2)$ ؛ $f(x) = x^3 - 1$

له راهینانی 13 تا 33 داتاشراوی نهخشهکه بدۆزهوه.

$$f(x) = x^{12} \quad 14$$

$$f(x) = x^3 - 3x^2 \quad 16$$

$$f(x) = x^{\frac{1}{2}} - x^{-\frac{1}{2}} \quad 18$$

$$f(x) = 4 \cos x + 6 \quad 20$$

$$f(x) = (3x^2 + 7)(x^2 - 2x + 3) \quad 22$$

$$f(x) = x^3 \cos x \quad 24$$

$$f(x) = \frac{9}{3x^2 - 2x} \quad 26$$

$$f(x) = 2x - x^2 \tan x \quad 28$$

$$f(x) = \left(\frac{x-3}{x^2+1} \right)^2 \quad 30$$

$$f(x) = \frac{3x}{\sqrt{x^2+1}} \quad 32$$

$$f(x) = -12 \quad 13$$

$$f(x) = -8x^5 \quad 15$$

$$f(x) = 6\sqrt{x} + 3\sqrt[3]{x} \quad 17$$

$$f(x) = \frac{2}{(3x)^2} \quad 19$$

$$f(x) = 3 \cos x - \frac{\sin x}{4} \quad 21$$

$$f(x) = \sqrt{x} \sin x \quad 23$$

$$f(x) = \frac{x^2+x-1}{x^2-1} \quad 25$$

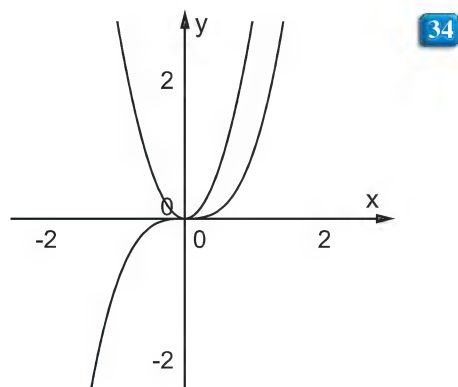
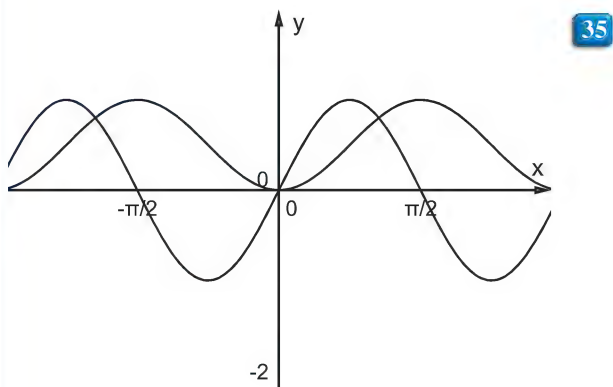
$$f(x) = \frac{x^2}{\cos x} \quad 27$$

$$f(x) = x \cos x - \sin x \quad 29$$

$$f(x) = \frac{2}{3} \sin^{\frac{3}{2}} x - \frac{2}{7} \sin^{\frac{7}{2}} x \quad 31$$

$$f(x) = \frac{\cos(x-1)}{x-1} \quad 33$$

نووسین له دوو راهینان 34 و 35 وینهی پوونکردنهوهی نهخشهکه و داتاشراوی یهکه می نهخشهکه دردهکه ویت وینهی پوونکردنهوهی نهخشهکه و داتاشراوهکی جیاکه وه پوونیکه وه بۆ ئه و کاره پشتت بهچی بهستوه.



له راهینانی 36 تا 41 داتاشراوی دووه می نهخشهکه بدۆزهوه.

$$f(x) = \frac{1}{\tan x} \quad 38$$

$$f(x) = \frac{1}{x} + \tan x \quad 37$$

$$f(x) = 2x^2 + \sin 2x \quad 36$$

$$f(x) = x\sqrt{x^2-1} \quad 41$$

$$f(x) = \frac{6x-5}{x^2+1} \quad 40$$

$$f(x) = \sin^2 x \quad 39$$

له راهینانی 42 تا 44 سهلمیتراوی لوبیتال بۆ دۆزینهوهی ئامانجی داواکراو بهکاربهینه.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x e^{-x^2} \quad 44$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \pi x}{\sin 2\pi x} \quad 43$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\ln x)^2}{x-1} \quad 42$$

ئامادەكارى بۇ تاقىردنەو

1 $f(x) = 4 - 3x$ كام لەمانە دەكاتە $f'(-1)$ ؟

- ☐ 7 ☐ 3 ☐ 7 ☐ 3 ☐ 7 ☐ 3

هېچيان نىيە

2 $f(x) = 1 - 3x^2$ كام لەمانە دەكاتە $f'(1)$ ؟

- ☐ 6 ☐ 5 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 5 ☐ 6

هېچيان نىيە

3 كام لەوانەى خوارەو بۇ نەخشەى $f(x) = x^{\frac{4}{3}}$ لە $x = 0$ راستە؟

☐ ا پروونكرندنەو كەى گۆشەى لەو خالەدا هەيە.

☐ ب لىكەوتى ستوونى لەو خالەدا هەيە.

☐ ج نەخشەكە لەو خالەدا پچراو.

☐ د $f(0)$ پېئاسەنەكراو.

☐ ه توانا داتاشراوى لەو خالەدا هەيە.

4 $f(x) = u(x)v(x)$ و $f'(1)$ بدۆزەو ئەگەر زانیت كە $u(1) = 2$, $u'(1) = 3$, $v(1) = -1$, $v'(1) = 1$.

- ☐ 7 ☐ 4 ☐ 1 ☐ 1 ☐ 4 ☐ 7

نەشە

5 داتاشراوى دووهمى نەخشەى $f(x) = x - \frac{1}{x}$ دەكاتە.

- ☐ $1 + \frac{1}{x^2}$ ☐ $1 - \frac{1}{x^2}$ ☐ $\frac{2}{x^3}$ ☐ $-\frac{2}{x^3}$

هېچ كاميان

6 كام لەمانەى خوارەو دەكاتە $\frac{d}{dx} \left(\frac{x+1}{x-1} \right)$.

- ☐ $\frac{2}{(x-1)^2}$ ☐ 0 ☐ $\frac{x^2+1}{x^2}$ ☐ $2x - \frac{1}{x^2} - 1$ ☐ $-\frac{2}{(x-1)^2}$

7 كام لەمانەى خوارەو ژمارەى لىكەوتە ئاسۆيەكانى نەخشەى $f(x) = (x^2 - 1)(x^2 + 1)$.

- ☐ 0 ☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4

8 تىكرای گۆرانی ساتى نەخشەى $f(x) = \frac{x^2+2}{x+4}$ لە $x = -1$ دەكاتە.

- ☐ 7 ☐ 4 ☐ 0 ☐ -4 ☐ -1

9 تىكرای گۆرانی ساتى قەبارە شەشپالۆيەك درىژى لايەكى x بىت بدۆزەو.

- ☐ x ☐ $3x$ ☐ $6x$ ☐ $3x^2$ ☐ x^3

لە دوو پاهىئانى 10 و 11 دا خالىك لەسەر تەوهرى x دەجوولیت و نەخشەى لادانەكەى دەكاتە $s(t) = 2 + 7t - t^2$ كە $t \geq 0$.

10 لەكام لەم كاتانە خالەكە بۇ لای چەپ دەجوولیت؟

- ☐ $t = 0$ ☐ $t = 1$ ☐ $t = 2$ ☐ $t = \frac{7}{2}$ ☐ $t = 4$

11 لەكام لەم كاتانە خالەكە دەووستیت؟

- ☐ $t = 1$ ☐ $t = 2$ ☐ $t = \frac{7}{2}$ ☐ $t = 4$ ☐ $t = 5$

12 کام له مانه ی خواروه لیکه وتی نه خشه ی $y = \sin x + \cos x$ له $x = \pi$ ؟

$y = -x - \pi + 1$ ☐

$y = -x + \pi + 1$ ☐

$y = -x + \pi - 1$ ☐

$y = x - \pi + 1$ ☐

$y = -x - \pi - 1$ ☐

13 y'' بدوزهوه که $y = x \sin x$.

$-x \sin x + 2 \cos x$ ☐

$x \cos x + \sin x$ ☐

$-x \sin x$ ☐

$-\sin x + \cos x$ ☐

$x \sin x$ ☐

14 تهنیک به پی نه خشه ی لادانی $s(t) = 3 + \sin t$ دهجوولیت له کام له کاتانه ی خواروه خیرایی تهنکه دهکاته سفر؟

$\frac{3\pi}{4}$ ☐

$t = \pi$ ☐

$t = \frac{\pi}{2}$ ☐

$t = \frac{\pi}{4}$ ☐

$t = 0$ ☐

15 $y = \tan(4x)$ کام له مانه ی دین دهکاته $\frac{dy}{dx}$.

$\frac{4}{\cos^2(4x)}$ ☐

$\frac{1}{\cos^2(4x)}$ ☐

$\frac{4}{\tan x}$ ☐

$\frac{\tan(4x)}{\cos(4x)}$ ☐

$\frac{4 \tan(4x)}{\cos x}$ ☐

16 $y = \cos^2(x^3 + x^2)$ کام له مانه ی دین دهکاته $\frac{dy}{dx}$ ؟

$-2(3x^2 + 2x)$ ☐

$-(3x^2 + 2x) \cos(x^3 + x^2) \sin(x^3 + x^2)$ ☐

$-2(3x^2 + 2x) \cos(x^3 + x^2) \sin(x^3 + x^2)$ ☐

$2(3x^2 + 2x) \cos(x^3 + x^2) \sin(x^3 + x^2)$ ☐

$2(3x^2 + 2x)$ ☐

17 $x^2 - xy + y^2 = 1$ کام له مانه دهکاته $\frac{dy}{dx}$.

$\frac{2x+y}{x}$ ☐

$\frac{2x+y}{x-2y}$ ☐

$\frac{2x}{x-2y}$ ☐

$\frac{y+2x}{2y-x}$ ☐

$\frac{y-2x}{2y-x}$ ☐

18 $y = x^{\frac{3}{4}}$ کام له مانه دهکاته $\frac{dy}{dx}$.

$\frac{3}{4x^{\frac{1}{4}}}$ ☐

$\frac{4}{3x^{\frac{1}{4}}}$ ☐

$\frac{3x^{\frac{1}{4}}}{4}$ ☐

$\frac{4x^{\frac{1}{4}}}{3}$ ☐

$\frac{3x^{\frac{1}{3}}}{4}$ ☐

19 کام له مانه لاری لیکه وتی چه ماوه ی $y^2 - x^2 = 1$ له خالی $(1, \sqrt{2})$.

0 ☐

$\sqrt{2}$ ☐

$\frac{1}{\sqrt{2}}$ ☐

$-\sqrt{2}$ ☐

$-\frac{1}{\sqrt{2}}$ ☐

20 کام له مانه لاری لیکه وتی چه ماوه ی $y = 2^{1-x}$ له خالی $x = 2$ ؟

$-\frac{\ln 2}{2}$ ☐

2 ☐

-2 ☐

$\frac{1}{2}$ ☐

$-\frac{1}{2}$ ☐

جىبەجىكرىدەكانى داتاشراو

Applications of Differentiation

بەشى چوارەم

وانەكان

1-4 تاقىكرىدەكانى داتاشراوى يەكەم.

2-4 تاقىكرىدەكانى داتاشراوى دووم.

3-4 ئامانجەكان لە بىپاياندا.

تاقىكرىدەكانى نىووى بەش

4-4 كىشانى پرونكرىدەكانى نەخشەكان

5-4 گەران بەدواى بەهاىەكانى كۆتايى

پىداچوونەو

ئامادەكارى بۇ تاقىكرىدەكانى

چەند ھۆكارىك كارىگەرى ھەيە لەسەر بەكاربردنى ئۆتۆمبىل بۇ سووتەمەنى، لەوانە جۆرى قىرى پىگا كە جۆرى تايەكان، خىرايى، جۆرى بەنزىنەكە. يەككە لە كارگەكانى ئۆتۆمبىل نەخشەى

$$m(v) = 0.00015v^3 - 0.032v^2 + 1.8v + 1.7$$

وەك نمونەيەك بەكاردەھىننەت بۇ

ھەژمارکردنى ئەو دوورىيەى «بەمىل»

ئۆتۆمبىلەكە بە ھەر گالۆنىك سووتەمەنى

بەپىي خىرايى ۷ «مىل لەكاتزىمىرئىكدا»

دەپىرئەت. بە چ خىرايەك ئەو جۆرە

ئۆتۆمبىلە لىبخورپىت تاوەكو دوورى بەيەك

گالۆن سووتەمەنى بېرپىت؟

ئایا تۆ ئامادەیت؟

زاراۋەكان ✓

1

ھەر دەستەۋازىيەكى ستوونى لاي راست بە لىكدانەۋەكەى لە ستوونى لاي چەپ بېستەۋە.

1. تىكپاي گۆران ☐ ا
 2. خىرايى ساتى ☐ ب
 3. نەخشەى لادان ☐ ج
 4. نەخشەيەك تواناي ☐ د
 - داتاشراوى ھەبىت. ☐ ه
- نەخشەيەكە. شويىنى تەنە جولاًۋەكە بەپيى كات دياريدەكات.
ئەنجامى دابەشكردى دوورپيە لەسەر كات.
رېژەيەكە گۆراوى ئازاد لە ژيەرەكەى دەگۆرپىت و گۆراوى پەيوەست لە سەرەكە دەگۆرپىت.
خىرايى تەنيكى جولاًۋە لەساتيكي ديارىكراو.
نەخشەيەكە لاريەكەى لەھەر خاليك لە خالەكانى
پوونكردنەۋەكەيدا پيئاسەكراو.

ھەژماركردى داتاشراو ✓

لە راھيئانى 2 تاكو 7 داتاشراوى نەخشەكە بدۆزەۋە.

$$f(x) = x\sqrt{2x+1} \quad \boxed{4}$$

$$f(x) = 2\sin x \cos x \quad \boxed{3}$$

$$f(x) = \frac{2x+1}{2x-1} \quad \boxed{2}$$

$$f(x) = xe^{-x} \quad \boxed{7}$$

$$f(x) = e^{(1+\ln x)} \quad \boxed{6}$$

$$f(x) = \ln\sqrt{x} \quad \boxed{5}$$

ديارىكردى نيشانەى نەخشە بەجەبرى و پوونكردنەۋەى ✓

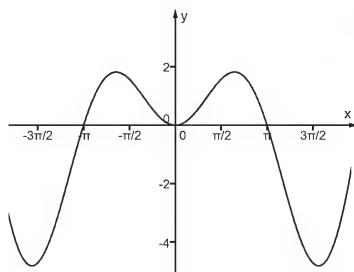
لە راھيئانى 8 تاكو 10 بەھايەكانى x ديارىكە كاتيک نيشانەى نەخشەكە دەگۆرپىت بە ديارىكردى ئەو گۆرانەى لە نيشانەى ھەر خاليك روودەدات.

$$f(x) = \ln x \quad \boxed{10}$$

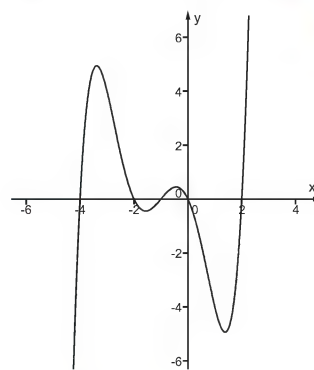
$$f(x) = x^2 - 9 \quad \boxed{9}$$

$$f(x) = \frac{x-2}{x+2} \quad \boxed{8}$$

لە دوو راھيئانى 11 و 12 لە نيشانەى نەخشەكە بکۆلەۋە لەماۋە ديارىكراۋەكەدا.



لە ماۋەى $[-\frac{3\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$



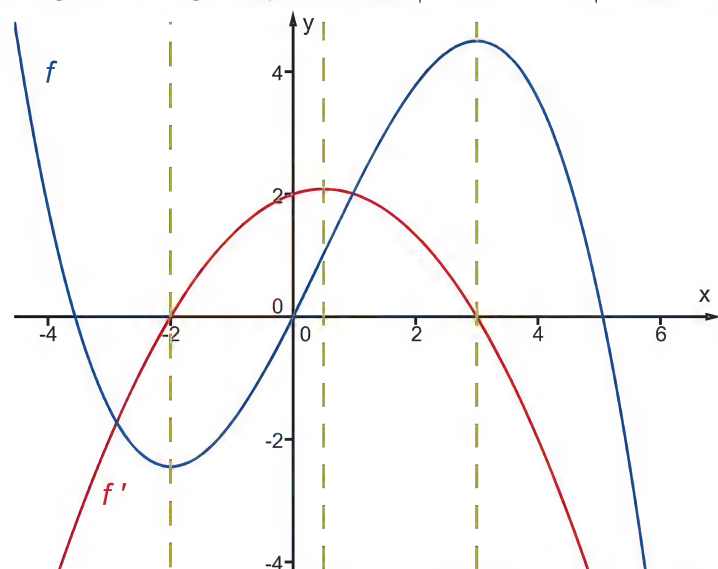
لە ماۋەى $[-5, 5]$

تاقیکردنه‌وه‌ی داتاشراوی یه‌که‌م

First Derivative Test

1-4

په‌یوه‌ندییه‌کی به‌هیز له نیوان نه‌خشه‌و داتاشراوه‌کانیان هه‌یه، به‌مه‌ش ده‌توانیت زۆر کاری په‌یوه‌ست به نه‌خشه‌یه‌ک پوخت بکه‌یتوه به‌هۆی ئه‌و زانیارییه‌یه‌ی له داتاشراوی یه‌که‌م یان له داتاشراوی دووهم ده‌ستت ده‌که‌وێت له‌م به‌شه‌دا فی‌ری ئه‌م په‌یوه‌ندییه و چۆنیه‌تی به‌کاره‌ینانی ده‌بیت.



پوو له‌زیادبوون و پوو له‌که‌مبوونی نه‌خشه‌کان

له‌ وینه‌ی سه‌ره‌وه پوونکردنه‌وه‌ی نه‌خشه‌ی f (به‌رنگی شین) و پوونکردنه‌وه‌ی داتاشراوی یه‌که‌م به (رهنگی سوور) ده‌رده‌که‌وێت، ئه‌گه‌ر له‌وینه پوونکردنه‌وه‌که وردبیتوه: ده‌گه‌یته ئه‌م ده‌رئه‌نجامانه.

1. کاتی‌ک x له‌سه‌ر ته‌وه‌رکه‌ی له‌ لای چه‌پ به‌ره‌و لای راست ده‌جوڵێت، خالی $M(x, f(x))$ له‌سه‌ر پوونکردنه‌وه‌ی نه‌خشه‌که به‌ره‌و خواره‌وه ده‌جوڵێت که ئه‌مه‌ش ده‌رپینه بۆ پوو له‌که‌مبوونی به‌هایه‌کانی $f(x)$ ، تا ده‌گاته -2 ، ده‌توانین ئه‌مه‌ش به‌و ئاخاوتنه ده‌ربهرپین، نه‌خشه‌که پوو له‌که‌مبوونه له‌ماوه‌ی $[-\infty, -2]$.

2. دوا‌ی ئه‌وه‌ی x له‌ -2 تێده‌په‌رێت، خالی $M(x, f(x))$ له‌سه‌ر پوونکردنه‌وه‌ی نه‌خشه‌که به‌ره‌و سه‌ره‌وه ده‌جوڵێت، ده‌رپینه بۆ پوو له‌زیادبوونی به‌هایه‌کانی $f(x)$ ، تا ده‌گاته 3 ، ده‌توانین ئه‌مه‌ش به‌و ئاخاوتنه ده‌ربهرپین، نه‌خشه‌که پوو له‌زیادبوونه له‌ماوه‌ی $[-2, 3]$.

3. خالی $M(x, f(x))$ ده‌ست به‌ جوڵان ده‌کاته‌وه له‌سه‌ر پوونکردنه‌وه‌ی نه‌خشه‌که به‌ره‌و خواره‌وه دوا‌ی ئه‌وه‌ی به‌های x له‌ 3 تێپه‌ر ده‌بێت، ده‌رپینه بۆ پوو له‌که‌مبوونی به‌هایه‌کانی $f(x)$ دووباره. ده‌توانین ئه‌مه‌ش به‌و ئاخاوتنه ده‌ربهرپین نه‌خشه‌که پوو له‌که‌مبوونه له‌ماوه‌ی $[3, +\infty]$.

4. به‌هایه‌کانی داتاشراوی یه‌که‌می نه‌خشه‌که سالبه له‌هه‌ردوو ماوه‌ی $[-\infty, -2]$ و $[3, +\infty]$ به‌لام له‌ماوه‌ی $[-2, 3]$ موجه‌به.

5. پوو له‌که‌مبوونی نه‌خشه له‌ماوه‌یه‌که‌دا به‌ستراوته‌وه به‌ سالبوونی به‌هایه‌کانی داتاشراوی یه‌که‌م، و پوو له‌زیادبوونی به‌ستراوته‌وه به‌ موجه‌بوونی به‌هایه‌کانی داتاشراوی یه‌که‌م، به‌ به‌هایه‌کانی x که‌واده‌کات $f'(x) = 0$ ده‌وتریت به‌ها شلۆقه‌کانی نه‌خشه.

ئامانجه‌کان

- چه‌مکی به‌های کۆتایی
- خۆجیی نه‌خشه فی‌رده‌بیت و جیایده‌کاته‌وه.
- به‌هایه‌کانی کۆتایی خۆجیی نه‌خشه دیاریده‌کات.
- ماوه‌کانی پوو له‌زیادبوون و پوو له‌ که‌مبوونی نه‌خشه دیاریده‌کات.
- تاقیکردنه‌وه‌ی داتاشراوی یه‌که‌م به‌کارده‌هێنێت بۆ دۆزینه‌وه‌ی به‌هایه‌کانی کۆتایی خۆجیی نه‌خشه.

زاراوه‌کان

Vocabulary

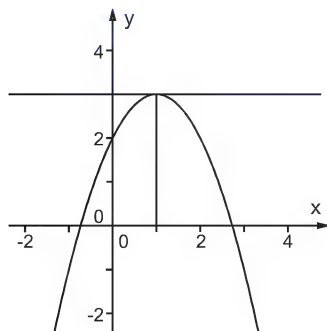
- پوو له‌که‌مبوون
Decreasing
- پوو له‌ زیادبوون
Increasing
- به‌های بچووکت‌ترین کۆتایی
خۆجیی
Local Minimum value
- به‌های گه‌وره‌ترین کۆتایی
خۆجیی
local maximum value
- خالی وه‌رگه‌پان
point of Inflection
- به‌های شلۆق
Critical Value
- خشته‌ی گۆرانه‌کان
Table of variations

دهتوانیت ئه‌وه‌ی پێشوو لهم خسته‌یه پوخته‌بکه‌یت.

x	$-\infty$	-2	3	$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$+$	$-$
$f(x)$		پوو له‌که‌مبوون ↘	پوو له‌زیادبوون ↗	پوو له‌که‌مبوون ↘

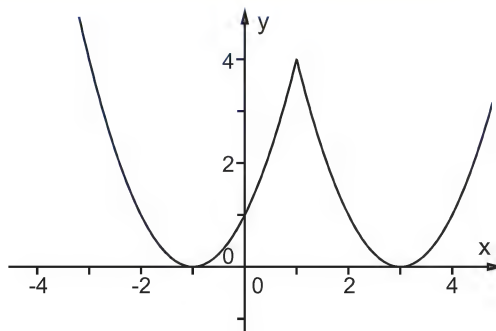
پێناسه‌ی به‌ها شلۆقه‌کان

f نه‌خسته‌یه‌کی پێناسه‌کراوه له $x = c$ ، به‌به‌های c بۆ گۆراوی ئازادی x ده‌وتریت به‌های شلۆقی نه‌خسته‌ی f ته‌گه‌ر داتا‌شراوه‌که‌ی پێناسه‌ نه‌کرا بێت له $x = c$ یان ته‌گه‌ر $f'(c) = 0$.



$$f'(x) = 0$$

1 به‌های شلۆقی نه‌خسته‌یه.

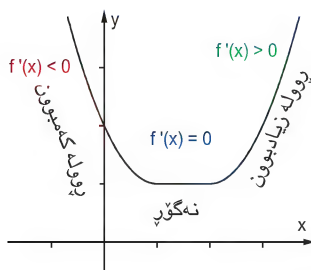


$$f'(x) \text{ پێناسه‌ نه‌کراوه له } x = 1$$

1 به‌های شلۆقی نه‌خسته‌یه.

پێناسه‌ی نه‌خسته‌ پوو له‌ زیادبوونه‌کان و پوو له‌ که‌مبوونه‌کان

به‌ نه‌خسته‌ی f ده‌وتریت پوو له‌ زیادبوون له‌ ماوه‌ی $I = [a, b]$ ته‌گه‌ر لاسه‌نگه‌ی $x_1 < x_2$ ته‌وا $f(x_1) < f(x_2)$ که x_1 و x_2 هه‌رچه‌ند بێت له‌ ماوه‌ی I . هه‌روه‌ها به‌ نه‌خسته‌ی f ده‌وتریت پوو له‌ که‌مبوون له‌ ماوه‌ی $I = [a, b]$ ته‌گه‌ر لاسه‌نگه‌ی $x_1 < x_2$ ته‌وا $f(x_1) > f(x_2)$ که x_1 و x_2 هه‌رچه‌ند بێت له‌ ماوه‌ی I .



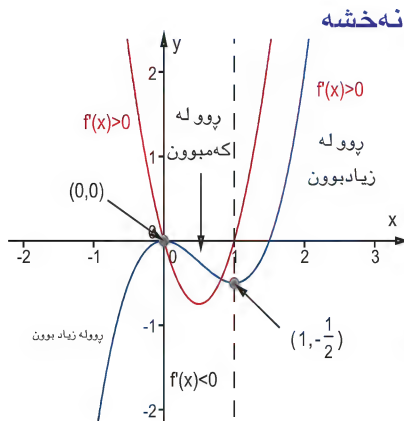
به‌ واتایه‌کی تر، نه‌خسته‌که‌ پوو له‌ زیادبوون ده‌بێت کاتی‌ک خاڵی $(x, f(x))$ به‌ره‌و سه‌ره‌وه‌ ده‌جولێت هه‌رچه‌ند x به‌ره‌و لای راست ب‌جولێت. و پوو له‌ که‌مبوون ده‌بێت کاتی‌ک خاڵی $(x, f(x))$ به‌ره‌و خواره‌وه‌ ده‌جولێت، هه‌رچه‌ند x به‌ره‌و لای راست ب‌جولێت، بۆ نمونه:

له‌وێنه‌ی به‌رامبه‌ر نه‌خسته‌که‌ پوو له‌ که‌مبوونه‌ له‌ ماوه‌ی $]-\infty, a]$ و نه‌گۆڕه‌ له‌ ماوه‌ی $]a, b]$ و پوو له‌ زیادبوونه‌ له‌ ماوه‌ی $]b, +\infty[$ هه‌روه‌ها، له‌ وێنه‌که‌ ته‌وه‌ ده‌رده‌که‌وێت که‌ موجه‌بوونی داتا‌شراوه‌که‌ به‌ پوو له‌ زیادبوونی نه‌خسته‌که‌ لێکه‌ده‌دریته‌وه‌، هه‌روه‌ها کاتی‌ک داتا‌شراوه‌که‌ سالب بێت به‌ پوو له‌ که‌مبوونی نه‌خسته‌که‌ لێکه‌ده‌دریته‌وه‌، به‌لام نه‌بوونی داتا‌شراوه‌که‌ $(f'(x) = 0)$ له‌ ماوه‌یه‌کدا به‌ نه‌گۆڕی لێکه‌ده‌دریته‌وه‌.

نه‌خشه‌ی f توانای داتاشراوی ده‌بیټ.

1. ئەگەر $f'(x) > 0$ له‌ماوی I دا، ئەوا f نه‌خشه‌یه‌کی پوو له‌زیادبوونه له‌م ماوه‌یه‌دا.
2. ئەگەر $f'(x) < 0$ له‌ماوی I دا، ئەوا f نه‌خشه‌یه‌کی پوو له‌که‌مبوونه له‌م ماوه‌یه‌دا.
3. ئەگەر $f'(x) = 0$ له‌ماوی I دا، ئەوا f نه‌خشه‌یه‌کی نه‌گۆره له‌م ماوه‌یه‌دا.

1 نموونه



ماوه‌کانی پوو له زیادبوون و پوو له که‌مبوونی نه‌خشه

ماوه‌کانی پوو له زیادبوون و پوو له که‌مبوونی نه‌خشه‌ی $f(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2$ بدۆزهوه.

شیکار

نه‌خشه‌ی f توانای داتاشراوی هه‌یه له \mathbb{R} چونکه نه‌خشه‌یه‌کی پاده‌داره بۆ دیاریکردنی به‌هایه‌کانی شلۆق بۆ نه‌خشه‌که، داتاشراوه‌که‌ی بدۆزهوه به‌هایه‌کانی x دیاریبکه که ئەو داتاشراوه ده‌کهنه 0.

$$f'(x) = 3x^2 - 2\left(\frac{3}{2}\right)x = 3x^2 - 3x = 3x(x-1)$$

به‌هایه‌کانی x که داتاشراو ده‌کهنه 0 بریتییه له $x=0$ و $x=1$ نه‌خشه‌که دوو به‌های شلۆقی هه‌یه ئەوانیش $x=0$ و $x=1$ ، ده‌توانیت ئەوانی پێشوو له‌م خشته‌ی خواره‌وه پوخت بکه‌یته‌وه که به خشته‌ی گۆران ناوده‌برێت.

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$3x$	$-\infty$	-	0	$+\infty$
$(x-1)$	$-\infty$	-	-1	$+\infty$
$f'(x)$	$-\infty$	+	0	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	\nearrow	$f(0)=0$	\searrow
			$f(x)=-\frac{1}{2}$	\nearrow

نه‌خشه‌که پوو له زیادبوونه له‌هه‌ردوو ماوه‌ی $[-\infty, 0]$ و $[1, +\infty]$ پوو له که‌مبوونه له‌ماوه‌ی $[0, 1]$

1. ماوه‌کانی پوو له زیادبوون و پوو له که‌مبوونی نه‌خشه‌ی

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 - \frac{9}{2}$$



بۆ ئەوه‌ی په‌یوه‌ندی نیوان نیشانه‌ی داتاشراو له‌ماوه‌یه‌ک و پوو له زیادبوون و پوو له که‌مبوونی

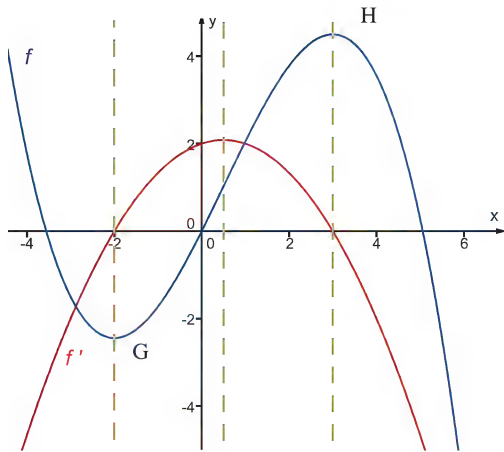
نه‌خشه‌که تی‌ب‌گه‌یت، ئەمانه‌ی د‌یت تی‌بینی بکه. ئەگەر نه‌خشه‌که پوو له زیادبوون بی‌ت واتا

$f(x+h) > f(x)$ کاتێک $h > 0$ واتا $f(x+h) < f(x)$ کاتێک $h < 0$. له‌وه‌وه د‌ه‌ره‌چ‌یت که

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} > 0 \text{ له‌ دواییدا } f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} > 0 \text{ له‌هه‌موو ئەو بارانه‌ی که تی‌یدا}$$

نه‌خشه‌که پوو له زیادبوونه. به‌هه‌مان شیوه ده‌توانیت لی‌ک‌به‌ده‌یته‌وه بۆچی داتاشراوه‌که سالب ده‌بی‌ت له ماوه‌یه‌که‌دا ئەگەر نه‌خشه‌که پوو له که‌مبوون بی‌ت.

به‌هایه‌کانی گه‌وره‌ترین خوجی و بچووکترین خوجی



لی‌روهه فی‌رده‌بیت چون داتاشراو به‌کاربه‌نیت
بۆ دۆزینه‌وهی به‌هایه‌کانی گه‌وره‌ترین خوجی
و بچووکترین خوجی نه‌خشه‌یه‌ک. سه‌یری
وینه‌ پروونکردنه‌وه‌که‌ی به‌رام‌به‌ر بکه‌ ئه‌مانه‌ت
بۆ دهرده‌چیت.

1. پروونکردنه‌وهی نه‌خشه‌که به‌ خالی G دا ده‌پوات
کاتی‌ک به‌های x ده‌کاته -2 ، هه‌روه‌ها به‌خالی
 H دا ده‌پوات کاتی‌ک به‌های x ده‌کاته 3 .

2. تانه‌کانی y بۆ هه‌موو خاله‌کانی

پروونکردنه‌وهی نه‌خشه‌که له‌ هاوسیه‌کانی خالی

G گه‌وره‌تره له‌ تانی خاله‌که که یه‌کسانه به‌ $f(-2)$ ،

به‌ خالی G ده‌وتریت به‌های بچووکترین خوجی نه‌خشه‌ی f ده‌نوینیت وتانی y بچووکترین ئه‌و
خاله ده‌کاته به‌های بچووکترین خوجی نه‌خشه‌که.

3. تانه‌کانی y بۆ هه‌موو خاله‌کانی پروونکردنه‌وهی نه‌خشه‌که له‌ هاوسیه‌کانی خالی H بچووکتره له
تانی خاله‌که که یه‌کسانه به‌ $f(3)$ و خالی H به‌های گه‌وره‌ترین خوجی نه‌خشه‌ی f ده‌نوینیت.
تانی y ئه‌و خاله ده‌کاته به‌های گه‌وره‌ترین خوجی نه‌خشه‌که.

4. داتاشراوی یه‌که‌م ده‌کاته 0 کاتی‌ک نه‌خشه‌که به‌های گه‌وره‌ترین خوجی یان به‌های بچووکترین
خوجی ده‌بیت. به‌هایه‌کانی کۆتایی خوجی نه‌خشه‌ بریتییه له‌ گه‌وره‌ترین و بچووکترین به‌ها
خوجیه‌کان.

ئه‌م خشته‌ی خواره‌وه تی‌بینیه‌کانی پێشوو بوخته‌ده‌کاته‌وه.

خشته‌ی خواره‌ود تی‌بینیه‌کانی پیش‌وو پوخته‌ده‌گاته‌ود.

x	$-\infty$	-2	3	$+\infty$	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	\searrow	$f(-2)$	\nearrow	$f(3)$	\searrow

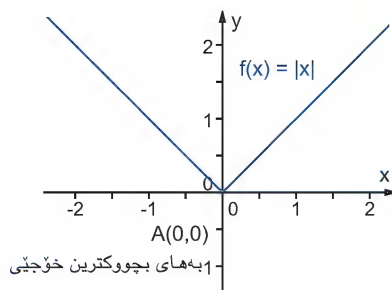
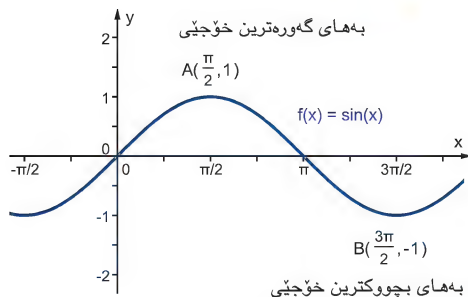
به‌هایه‌کانی داتاشراو له به‌های کۆتایی خوجی

2 نموونه

به‌های داتاشراوه‌که بدۆزه‌وه له‌هه‌ر به‌هایه‌کی کۆتایی خوجی بۆ هه‌ردوو نه‌خشه‌ی

ب $f(x) = \sin x$ له‌ماوه‌ی $[0, 2\pi]$

ا $f(x) = |x|$ له‌ماوه‌ی $[-1, 1]$



شیکار

ا نه خشه ی $f(x) = |x|$ به های بچو وکترین خوجی هیه له $x=0$ ، داتاشراوی نه خشه که له خاله دا پیناسه نه کراوه.

ب نه خشه ی $f(x) = \sin x$ به های گوره ترین خوجی له $x = \frac{\pi}{2}$ و به های بچو وکترین خوجی له $x = \frac{3\pi}{2}$ هیه داتاشراوی نه خشه که بریتییه له $f'(x) = \cos x$ که له به هایه کانی کوتایی ئهم به هایانه ی دیت ودرده گریٹ:

$$f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \quad \text{و} \quad f'\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0$$

2. به های داتاشراو که له ههر به هایه کی کوتایی ئهم دوو نه خشه یه بدوزوه.

$$f(x) = \frac{9(x^2-3)}{x^3} \quad \text{و} \quad f(x) = -|x|$$



تاقیکردنه و دی داتاشراوی یه که م

سه لمیترای 2-4

1. ئه گهر نیشانه ی $f'(x)$ له موجه به وه بۆ سالب بگوریت کاتیک به $x=c$ دا دهروات ئه و خالی $(c, f(c))$ به های گوره ترین خوجی دهنوینیت.
2. ئه گهر نیشانه ی $f'(x)$ له سالب بۆ موجه بگوریت کاتیک به $x=c$ دا دهروات ئه و خالی $(c, f(c))$ به های بچو وکترین خوجی دهنوینیت.

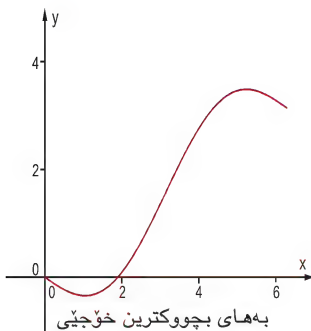
به کارهینانی داتاشراوی یه که م

به هایه کانی کوتایی خوجی نه خشه ی $f(x) = \frac{1}{2}x - \sin x$ له ماوه ی $[0, 2\pi]$ بدوزوه.

شیکار

نه خشه که توانای داتاشراوی له ماوه ی $[0, 2\pi]$ دا هیه، به دوزینه و دی خاله کانی شلوق ده ستپیکه.

$$f'(x) = \frac{1}{2} - \cos x$$



له بهر ئه و دی داتاشراو که پیناسه کراوه له هه موو به هایه کانی x ئه و به ها شلوقه کانی نه خشه که ئه وانن که شیکاری هاوکیشه ی $\frac{1}{2} - \cos x = 0$ پیکده هینیت له ماوه ی $[0, 2\pi]$ ، لیره دا دوو به ها هیه $x = \frac{\pi}{3}$ و $x = \frac{5\pi}{3}$.

خشته ی گوران ئه مه ی خوار وه دیه

x	0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{3}$	2π			
$f'(x)$	$-\frac{1}{2}$	-	0	+	0	-	$-\frac{1}{2}$
$f(x)$	0	$\searrow f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\pi-3\sqrt{3}}{6}$	$\nearrow f\left(\frac{5\pi}{3}\right)=\frac{5\pi+3\sqrt{3}}{6}$	\searrow	π		

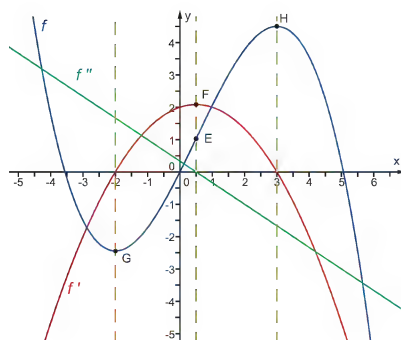
دواى دروستکردنى خشتهى گۆرانهكان، دياريكردنى بههايەكانى كۆتايى خۆجىي و جوړى هەريەكەيان ئاسان دەبێت. نهخشەى f به‌هاى بچووكترين خۆجىي هەيه له $x = \frac{\pi}{3}$ كه دهكاتە $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\pi - 3\sqrt{3}}{6}$ و به‌هاى گەورەترين خۆجىي هەيه له $x = \frac{5\pi}{3}$ كه دهكاتە $f\left(\frac{5\pi}{3}\right) = \frac{5\pi + 3\sqrt{3}}{6}$

3. به‌هايەكانى كۆتايى خۆجىي نه‌خشەى $f(x) = \cos x - \frac{1}{2}x$ بدۆزەوه له ماوهى $[0, 2\pi]$ و جوړى هەريەكەيان دياريبكه.



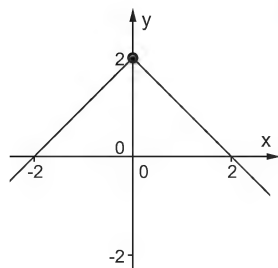
خالەكانى وەرگەرەن

وێنەى بەرامبەر پوونکردنەوه‌كانى نه‌خشەى f به (پهنگى شين) و داتاشراوى يەكەمى (بەپهنگى سوور) و داتاشراوى دووهمى به (پهنگى سەوز) دەنوێنێت. دەتوانیت تێبيني ئەوه بکەیت كه پوونکردنەوهى نه‌خشەكه قۆپاوه كاتێك داتاشراوى دووهمى موجهب دەبێت و قۆز دەبێت كاتێك داتاشراوى دووهمى سالب دەبێت، هەروەها له خالى E چه‌ماوه‌كه له قۆپاو بۆ قۆز دەگۆرێت، سەرنجبدە كه پۆى ئەو خالە بریتییه له به‌هاى x كه داتاشراوى دووهمى دهكاتە 0، به E دەوتریت خالى وەرگەرەننى نه‌خشەكه.

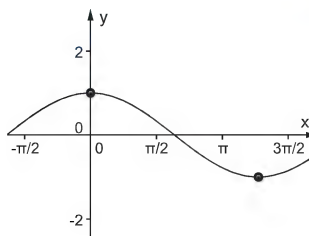


له پاهینانی 1 تا 3، بهای داتاشراودکه (نهگه هه بوو) لههه بههیهکی کۆتایی بدۆزهوه.

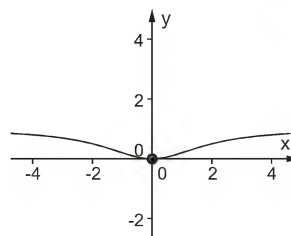
$$f(x) = 2 - |x| \quad \text{3}$$



$$f(x) = \cos\left(\frac{\pi x}{4}\right) \quad \text{2}$$

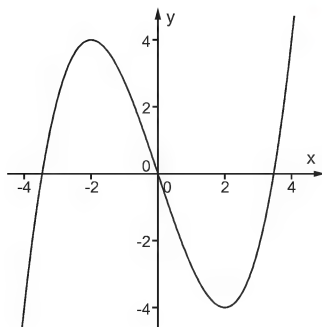


$$f(x) = \frac{x^2}{x^2 + 4} \quad \text{1}$$

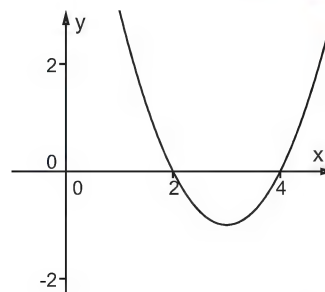


له پاهینانی 4 تا 10، ماودکانی پوو له زیادبوون و پوو له کهمبوون بدۆزهوه.

$$f(x) = \frac{x^3}{4} - 3x \quad \text{5}$$

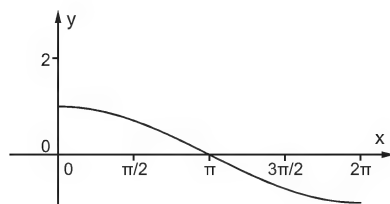


$$f(x) = x^2 - 6x + 8 \quad \text{4}$$



$$f(x) = \cos \frac{x}{2} \quad \text{6}$$

$$0 < x < 2\pi$$



$$f(x) = \frac{x^2}{x+1} \quad \text{8}$$

$$0 < x < 2\pi \quad f(x) = x - 2\cos x \quad \text{10}$$

$$f(x) = \frac{1}{x^2} \quad \text{7}$$

$$f(x) = 27x - x^3 \quad \text{9}$$

له پاهینانی 11 تا 13 بهای شلۆقهکانی نهخشهکه بدۆزهوه.

$$f(x) = \frac{x-1}{x+1} \quad \text{13}$$

$$f(x) = x^2(x^2 - 4) \quad \text{12}$$

$$f(x) = x^2(x-3) \quad \text{11}$$

له رايهتاني 14 تا 22 أ) بهها شلوقهكان بدۆزهده ب) ماوهكاني پوو له زيادبوون و پوو له كه مبووني نهخشهكه بدۆزهده ج) داتاشراوي يه كه م بۆ دۆزينه ودي به هايهكاني كو تايي خو جى به كاريهينه

$$f(x) = x^2(3-x) \quad \text{16} \quad f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x \quad \text{15} \quad f(x) = x^2 - 6x \quad \text{14}$$

$$f(x) = 5 - |x-5| \quad \text{19} \quad f(x) = x^{\frac{2}{3}} - 4 \quad \text{18} \quad f(x) = \frac{x^5 - 5x}{5} \quad \text{17}$$

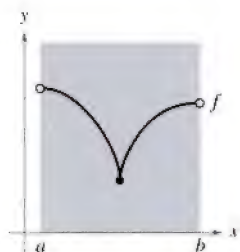
$$f(x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{x+1} \quad \text{22} \quad f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 9} \quad \text{21} \quad f(x) = x + \frac{1}{x} \quad \text{20}$$

له رايهتاني 23 تا 26 أ) بهها شلوقهكان بدۆزهده ب) ماوهكاني پوو له زيادبوون و پوو له كه مبووني نهخشهكه بدۆزهده ج) داتاشراوي يه كه م بۆ دياريكردني به هايهكاني كو تايي خو جى به كاريهينه د) وينهي پوونكر دهنه ودي نهخشهكه بكيشه بوئه ودي راستي ولامه كه ت پاسادان بكه يت. (تهنها له ماوهي $[0, 2\pi]$ كاره كه ت نهجام بده)

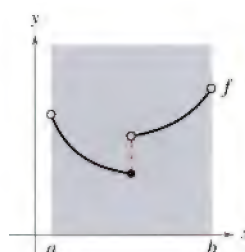
$$f(x) = (\sin x)(\cos x) \quad \text{24} \quad f(x) = \frac{x}{2} + \cos x \quad \text{23}$$

$$f(x) = \frac{\sin x}{1 + \cos^2 x} \quad \text{26} \quad f(x) = \cos^2(x) \quad \text{25}$$

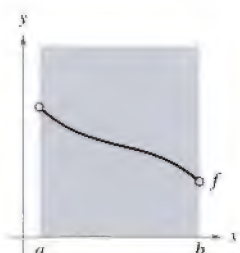
له رايهتاني 27 تا 30، دياريكه نه گهر نهخشهكه به هاي بچووكترين كو تايي خو جى له ماوهي $[a, b]$ دا ههيه، به پي پوونكر دهنه ودي له و ماوهيه دا.



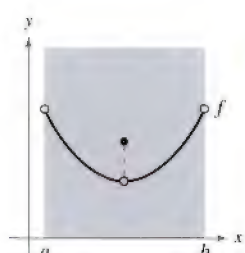
28



27



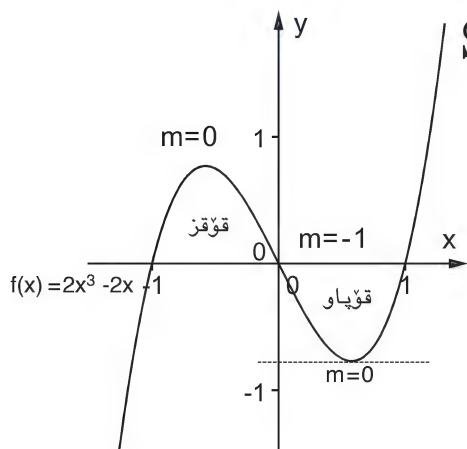
30



29

تاقیکردنه‌وی داتاشراوی دووهم

Second Derivative Test



قۆقز و قۆپاو

ئەگەر نەخشە f لە ماوەیەکی کراوە توانای داتاشراوی هەبێت، و داتاشراوی یەکەمی لەو ماوەیەدا پوو لەزیادبوون بێت، ئەوا چەماوەکە قۆپاوە لەو ماوەیەدا بەلام ئەگەر داتاشراوەکە لەو ماوەیەدا پوو لەکەمبوون بێت، ئەوا چەماوەکە قۆقزە لەو ماوەیەدا.

سەیری چەماوەی نەخشە $f(x) = 2x^3 - 2x$ لە وێنەی بەرامبەر بکە، ئەم چەماوەیە لە ماوەی $[-1, 0]$ قۆقزە و لە ماوەی $[0, 1]$ قۆپاوە.

نەخشەکە لێکەوتنێکی لە خاڵی $(0, 0)$ دا هەیە کە چەماوەکە لە قۆقزەو قۆپاوە دەگۆرێت.

ئامانجەکان

- ئەو ماوانەیی کە پوونکردنەوی نەخشەکە تێیدا قۆپاوە یان قۆقزە دیاریدەکات.
- خاڵەکانی وەرگەپانی پوونکردنەوی نەخشەکە دەدۆزیتەوه.
- داتاشراوی دووهم بۆ پۆلینکردنی بەهایەکانی کۆتایی خۆجێی نەخشەکە بەکاردههێنێت.

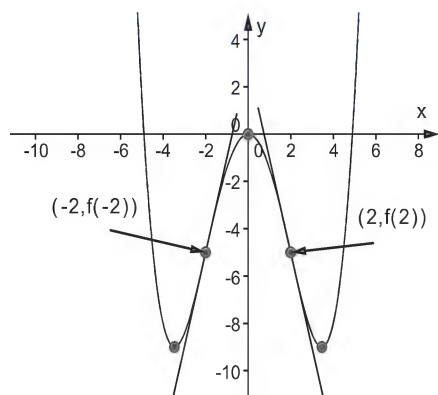
تاقیکردنەوه‌کانی قۆقز و قۆپاو

- f نەخشەیکە لە ماوەی کراوەی I دووجار توانای داتاشراوی هەیە.
1. ئەگەر $f''(x) > 0$ لە ماوەی I دا، ئەوا چەماوەی نەخشەکە لە ماوەی I قۆپاوە.
 2. ئەگەر $f''(x) < 0$ لە ماوەی I دا، ئەوا چەماوەی نەخشەکە لە ماوەی I قۆقزە.

زاراوه‌کان

Vocabulary

Concave	قۆپاو
Convex	قۆقز



نموونه 1 دیاریکردنی قۆقز و قۆپاو

ماوەکانی قۆقز و قۆپاوی نەخشە $f(x) = \frac{1}{16}x^4 - \frac{3}{2}x^2$ بدۆزەوه.

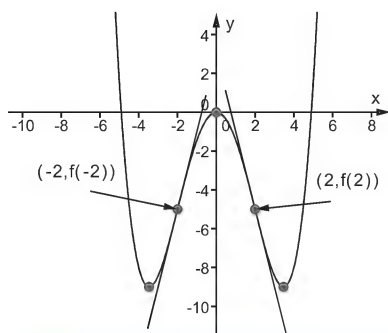
شیکار

داتاشراوی یەکەمی نەخشەکە بریتییه لە $f'(x) = \frac{1}{4}x^3 - 3x$ و داتاشراوی دووهمی بریتییه لە $f''(x) = \frac{3}{4}x^2 - 3$. دیاره $f''(x) = 0$ کاتی $x = \pm 2$.

لە لایەکی ترهه $f''(x) > 0$ لە هەردوو ماوەی $[-\infty, -2]$ و $[2, +\infty]$ و $f''(x) < 0$ لە ماوەی $[-2, 2]$. لەمەوه بۆت دەردهکهوێت کە پوونکردنەوی نەخشەکە قۆقزە لە ماوەی $[-2, 2]$ و قۆپاوە لە هەردوو ماوەی $[-\infty, -2]$ و $[2, +\infty]$ ، دەتوانیت ئەوهی پێشوو لەم خستەیی دێت پوختبکەیتەوه.

x	$-\infty$	-2	2	$+\infty$
$f''(x)$	$+$	$-$	$+$	
پوونکردنه و هکە $f(x)$	\cup	\cap	\cup	

1. ماوهکانی قۆز و قۆپاو بۆ نهخشه $f(x) = x^4 - 4x^2 + 1$ بدۆزهوه.



خالهکانی وەرگهپان

بهگهپانهوه بۆ پوونکردنهوهی نهخشه ی نمونهی 1 دهبنیت پوونکردنهوهکە له خالی $(-2, f(-2))$ له قۆپاو بۆ قۆز و له خالی $(2, f(2))$ له قۆزهوه بۆ قۆپاو دهگۆریت به ههیهکه له دوو خاله دوتریت خالی وەرگهپان.

پیناسهی خالی وەرگهپان

ئهگەر نهخشه f بهردوام بێت و ئهگەر پوونکردنهوهکە ی لیکهوتی له خالی $(c, f(c))$ ههبنیت، ئهوا ئهوه خاله بریتیه له خالی وەرگهپانی نهخشهکە و پوونکردنهوهکە ی. ئهگەر چهماوهکە لهوخاله دا له قۆپاو بۆ قۆز یان له قۆزهوه بۆ قۆپاو بگۆریت.

لهبهرمهکه

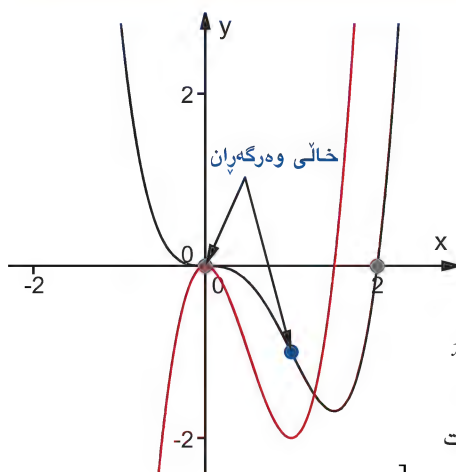
له پیناسهی خالی وەرگهپان پووسته نهخشهکە لیکهوتی ههبنیت لهوخاله دا.

بۆ دۆزینهوهی خالهکانی ههلبژێردراو که دهبنه خالی وەرگهپان، بههایهکانی x دیارییهکه که $f''(x) = 0$ یان $f''(x)$ نهبنیت.

خالی وەرگهپان

سهلمیترای 3-4

ئهگەر $(c, f(c))$ خالی وەرگهپانی نهخشهیهک بێت، ئهوا $f''(c) = 0$ یان $f''(c)$ ی پیناسه نهکراوه.



دۆزینهوهی خالهکانی وەرگهپان

خالهکانی وەرگهپان بۆ نهخشه $f(x) = x^4 - 2x^3$ دیارییهکه پاشان ماوهی قۆز و قۆپاوی پوونکردنهوهکە دیارییهکه.

شیکار

داتاشراوی یهکهمی نهخشهکە دهکاته $f''(x) = 4x^3 - 6x^2$ و داتاشراوی دووهمی دهکاته $f''(x) = 12x^2 - 12x$ له $x = 0$ و $x = 1$ پوونکردنهوه سوورکه بریتیه له پوونکردنهوهی داتاشراوی یهکهم، لهو پوونکردنهوه دا، دهردهکهوێت که داتاشراوی یهکهم پوو لهزیادبوونه لهماوهی $[-\infty, 0]$ ئهههش ئهوه دهگهینیت.

2 نمونه

تېئىرى بىكە

نەخشەكە لە $x = 0$ ۋە $x = 2$ لىكەۋى ھەيە.

پروونكرندنەۋەي نەخشەكە قۇپاۋە لەم ماۋەيەدا، لەلایەكى تر داتاشراۋى يەكەم لەماۋەي $[0, 1]$ پرو لەكەمبۈنە ئەمەش ئەۋە دەگەينىت كە پروونكرندنەۋەي نەخشەكە لەم ماۋەيەدا قۇقزە، پروونكرندنەۋەي نەخشەكە لە خالى $(0, 0)$ لە قۇپاۋە ۋە بۇ قۇقز دەگۈرپىت، ئەمەش ئەۋە دەگەينىت كە ئەۋ خالە برىتېيە لەخالى ۋەرگەران. لەلایەكى تر داتاشراۋى يەكەمى نەخشەكە لەماۋەي $1, +\infty$ [زياد دەكات ئەمەش ئەۋە دەگەينىت پروونكرندنەۋەي نەخشەكە لەم ماۋەيەدا قۇپاۋە پروونكرندنەۋەي نەخشەكە لەخالى $(1, -1)$ لە قۇقزەۋە بۇ قۇپاۋ دەگۈرپىت ئەمەش ئەۋە دەگەينىت ئەۋ خالە خالى ۋەرگەرانە.

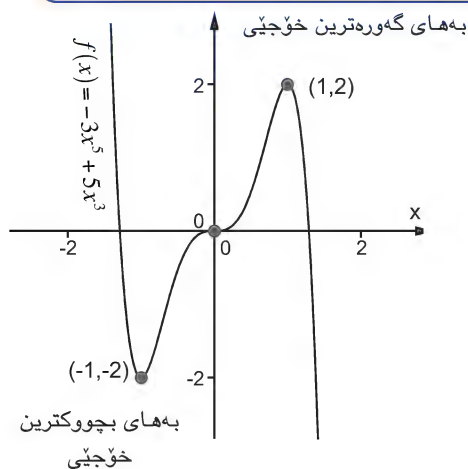
2. خالەكانى ۋەرگەرانى نەخشە $f(x) = -x^4 + 2x^3$ ديارىبكە ۋە لەقۇقز ۋە قۇپاۋى پروونكرندنەۋەكى بىكۆلەۋە.



سەرەراي تاقىكرندنەۋەي قۇپاۋ ۋە قۇقزى پروونكرندنەۋەي نەخشەكە، داتاشراۋى دوۋەم يارمەتيدەرە بۇ پۇلېنكردىن بەھايەكانى كۆتايى خۇجىي لەنپوان بەھايەكانى گەرەترىن ۋە بەھايەكانى بچوكتىن. ئەم تاقىكرندنەۋەي پىشت دەبەستىت بەۋەي كە قۇقزى پروونكرندنەۋەي نەخشەكە لە ھاۋسىكانى خالى $(c, f(c))$ كە $f'(c) = 0$ پىۋىستە $f(c)$ بىكاتە بەھاي گەرەترىن خۇجىي. ھەرۋەھا قۇپاۋى پروونكرندنەۋەي نەخشەكە لە ھاۋسىكانى $(c, f(c))$ كە $f'(c) = 0$ پىۋىستە $f(c)$ بىكاتە بەھاي بچوكتىن خۇجىي.

تاقىكرندنەۋەي داتاشراۋى دوۋەم

$f(x)$ نەخشەيەكە پاسادانى $f'(c) = 0$ دەكات ۋە $f''(x)$ لە ھاۋسىيەكانى $(c, f(c))$ پىناسەكرارە. 1. ئەگەر $f''(c) > 0$ ئەۋا خالى $(c, f(c))$ بەھاي بچوكتىن خۇجىي نەخشەكە دەنۋىنىت چۈنكە دەكەۋىتە ناۋچەي قۇپاۋ. 2. ئەگەر $f''(c) < 0$ ئەۋا خالى $(c, f(c))$ بەھاي گەرەترىن خۇجىي نەخشەكە دەنۋىنىت. چۈنكە دەكەۋىتە ناۋچەي قۇقز. ئەگەر $f''(c) = 0$ ئەۋا تاقىكرندنەۋەكى سەرگەۋتوۋ نابىت، پىۋىستە لەۋ بارەدا داتاشراۋى يەكەم بەكاربەھىنىت.



بەكاربەھىنانى داتاشراۋى دوۋەم

بەھايەكانى كۆتايى خۇجىي نەخشەي $f(x) = -3x^5 + 5x^3$ بدۆزەۋە.

شىكار

داتاشراۋى يەكەم بۇ نەخشەكە دەكاتە:

$$f'(x) = -15x^4 + 15x^2 = 15x^2(1 - x^2)$$

داتاشراۋى دوۋەمى دەكاتە $f''(x) = 30(-2x^3 + x)$

$f'(x) = 0$ كاتىك $x = -1$ ۋە $x = 0$ ۋە $x = 1$ نەخشەكە

بەھاي بچوكتىن خۇجىي دەبىت كاتىك $x = -1$

$$f''(-1) = 30(-2(-1)^3 + (-1)) = 30 > 0$$

بەھاي گەرەترىن خۇجىي دەبىت كاتىك $x = 1$ ئەۋا $f''(1) = 30(-2 \times 1^3 + 1) = 30 < 0$

لەبەرئەۋەي $f''(0) = 0$ ، ئەۋا تاقىكرندنەۋەكى سەرگەۋتوۋ نابىت بۇ ديارىكردىن كۆتايى خۇجىي

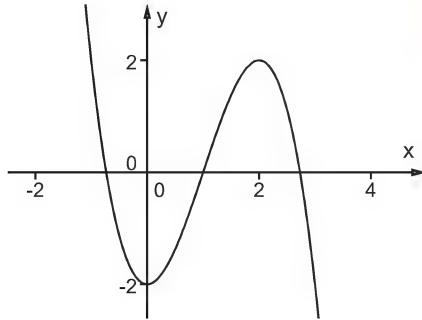
لە $x = 0$ داتاشراۋى يەكەم بەكاربەھىنە بۇ ئەۋە دەرىبەخەيت نەخشەكە لە پىش ۋە لەۋاي $x = 0$

پرو لەزيادبۈنە ئەمەش ئەۋە دەگەينىت كە لەۋخالەدا بەھاي كۆتايى خۇجىي نابىت.

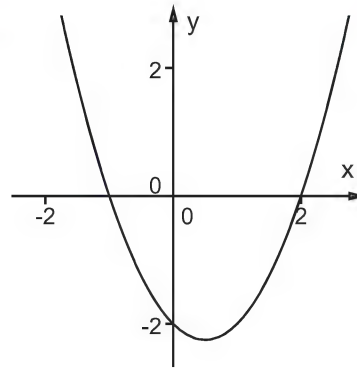
3. خالەكانى كۆتايى خۇجىي نەخشەي $f(x) = x^5 - 0.15x^3$ بدۆزەۋە.



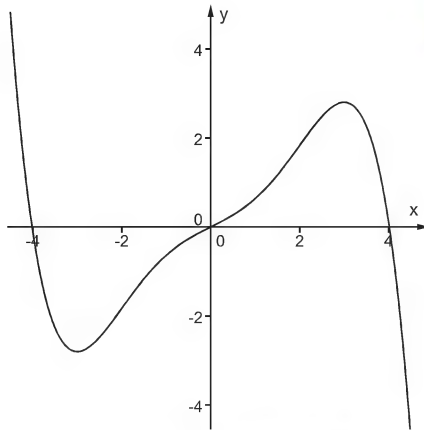
لەراھینانی 1 تا 4 ئەوماوە کراوانە دیاریبکە کە پوونکردنەوێ نەخشەکە تیایدا قۆپاوە یان قۆزە.



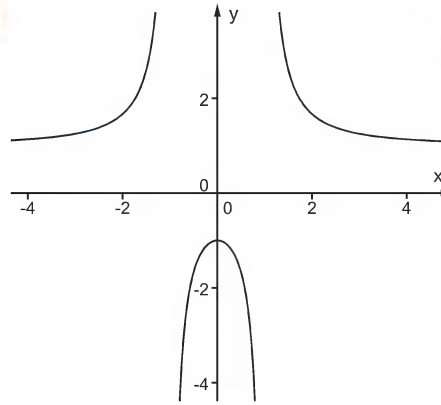
2



1



4



3

لەراھینانی 5 تا 11 خالەکانی وەرگەران بدۆزەو و ماوەکانی قۆپا و قۆزی پوونکردنەوێ نەخشەکە دیاریبکە.

$$f(x) = \frac{x}{x^2 + 1} \quad 7$$

$$f(x) = x\sqrt{x+3} \quad 6$$

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x \quad 5$$

$$f(x) = \frac{1}{\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)} \quad 9 \quad \text{لەماوەی } [0, 4\pi]$$

$$f(x) = \sin \frac{x}{2} \quad 8 \quad \text{لەماوەی } [0, 4\pi]$$

$$f(x) = x + 2\cos x \quad 11 \quad \text{لەماوەی } [0, 2\pi]$$

$$f(x) = \sin x + \cos x \quad 10 \quad \text{لەماوەی } [0, 2\pi]$$

لەراھینانی 12 تا 17 بەھایەکانی کۆتایی (گەورەترین و بچووکتەری) خۆجێی بدۆزەو بە بەکارھێنانی داتاشاروی دووھم ئەگەر لە توانادا بوو.

$$f(x) = x^{\frac{2}{3}} - 3 \quad 14$$

$$f(x) = -(x-5)^2 \quad 13$$

$$f(x) = x^4 - 4x^3 + 2 \quad 12$$

$$f(x) = \cos x - x \quad 17$$

$$f(x) = x + \frac{4}{x} \quad 16$$

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 1} \quad 15$$

دەربارەى چەمكەكان

18 نەخشەى f داتاشراوۈكەى نەخشەىيەكى پۈۈ لەزىادىبۈۈنە، پۈۈنكرىدەنەۈيەك بۇ f بىكىشە كاتىك

[i] $f' < 0$ [ب] $f' > 0$

19 نەخشەى f داتاشراوۈكەى نەخشەىيەكى پۈۈ لەكەمبۈۈنە، پۈۈنكرىدەنەۈيەك بۇ f بىكىشە كاتىك

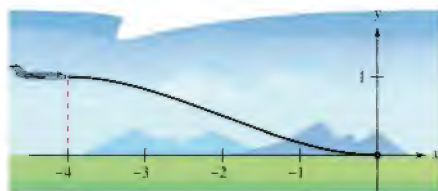
[i] $f' < 0$ [ب] $f' > 0$

20 وىنەى پۈۈنكرىدەنەۈى نەخشەى f بىكىشە خالى $(c, f(c))$ لەخۇبگىرىت كە $f''(c) = 0$ كاتىك $(c, f(c))$ خالى ۈرگەپانى نەخشەكە نەبىت.

21 پۈۈنكرىدەنەۈى نەخشەى $f(x) = \sqrt[3]{x}$ بىكىشە خالى ۈرگەپانى دىارىبىكە، ئايا داتاشراۈى دوۈم $f''(x)$ لەخالى ۈرگەپان پىناسەكراۈە؟ ۈلامەكەت پۈۈنكىكەۈە.

22 بەھايەكانى a ۈ b ۈ c ۈ d بدۆزۈۈ كاتىك نەخشەى سىجاي $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ بەھاي گەۈرەترىن خۇجىي لەخالى $(3, 3)$ ۈ بەھاي بچۈۈكترىن خۇجىي لەخالى $(5, 1)$ ۈ خالى ۈرگەپانى لە خالى $(4, 2)$ دا ەبىت.

23 **نىشتەنەۈى فرۆكە** فرۆكەيەك دەستىكرى بە نىشتەنەۈ كاتىك لەبەرزى يەك كىلۆمەتر، ۈ لەدۈۈرى 4 كىلۆمەتر لە پارەۈى (مدرج) فرۆكەخانەيەكدا دابۈۈ (سەيرى وىنەى بەرامبەر بكە).



[i] نەخشە سىجاي $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

بدۆزۈۈ كە لەماۈى $[-4, 0]$ پىرەۈى فرۆكەكە لەماۈى نىشتەنەۈى دەنۈيىت؟

[ب] لە كۈى نىشتەنەۈى فرۆكەكە بەخىراترىن تىكرا دەبىت؟

24 ئەۈى دىارىبىكە: ئەگەر f نەخشەيەكى سىجايى بىت ۈ 3 شىكارى راستى جىاۈزى ەبىت، ئەۈا خالى ۈرگەپانى ەيەۈ پۇى ئەۈ خالە دەكاتە ناۈەندى ەرسى شىكارەكانى نەخشەكە.

پاست يان ەلە؟ لە پاهىننى 25 تاكو 28، دىارىبىكە ئەگەر پستەكە پاستە شىبىكەۈە يان ئەگەر ەلەيە بەدژە نمۈۈنەيەك بسەلمىنە.

25 بۇ ەر نەخشەيەكى سىجا يەك خالى ۈرگەپان ەيە.

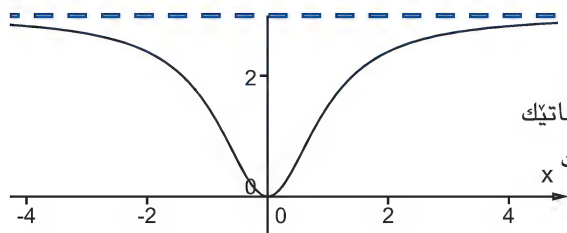
26 پۈۈنكرىدەنەۈى نەخشەى $f(x) = \frac{1}{x}$ قۆزە كاتىك $x < 0$ ۈ قۇپاۈە كاتىك $x > 0$ ۈ خالى ۈرگەپانى لە $x = 0$ دا ەيە.

27 ئەگەر $f'(c) > 0$ ئەۈا نەخشەى f لە $x = c$ قۇپاۈە.

28 ئەگەر $f''(2) = 0$ ، ئەۈا پۈۈنكرىدەنەۈى نەخشەى f خالى ۈرگەپانى لە $x = 2$ دا ەيە.

ئامانجهكان له بېپايان

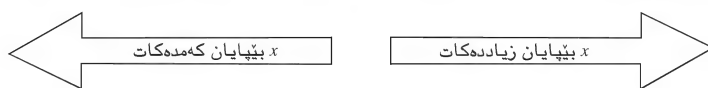
Limits at Infinity



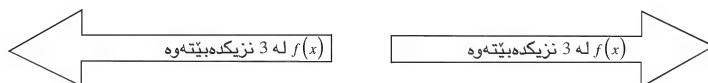
ئامانجهكان له بېپايان

لهم وانهيدها له سيفهتي نهخشه دهكولينهوه كاتيځ
بهاي x بېپايان زياددهكات يان كهدهكات
نهمهش بهم شيويه ددردهپرين، كاتيځ
($x \rightarrow +\infty$) يان ($x \rightarrow -\infty$)

له وينهي بهرامبه رپوونكرندنهوهي نهخشهي $f(x) = \frac{3x^2}{x^2+1}$ ددردهكهويټ، ههروهه نهوه
ددردهكهويټ كه بهاي $f(x)$ له 3 نزيكهبيټهوه كاتيځ x زياددهكات يان كهدهكات تابېپايان،
دوتوانيت بهژمارهبي بگهپته ههمان نهجام ههروهك له خوارهوه ددردهكهويټ.



x	$-\infty \leftarrow$	-100	-10	-1	0	1	10	100	$\rightarrow +\infty$
$f(x)$	$3 \leftarrow$	2.9997	2.97	1.5	0	1.5	2.97	2.9997	$\rightarrow 3$



له خستهكه وا ددردهكهويټ كهبهاي $f(x)$ له 3 نزيكهبيټهوه كاتيځ x بېسنور زياددهكات ($x \rightarrow +\infty$)
يان كاتيځ x بېسنور كهدهكات ($x \rightarrow -\infty$) نهم دوو ئامانجه له بېپايان بهم شيويه خوارهوه
دهنوسين.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 3 \quad \text{ئامانجي } f(x) \text{ له بېپاياني سالب.}$$

و

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 3 \quad \text{ئامانجي } f(x) \text{ له بېپاياني موجب.}$$

دركهناړه ئاسوييهكان

له نهخشهي $f(x) = \frac{3x^2}{x^2+1}$ بېنيمان، رپوونكرندنهوهي نهخشهكه له پاستههيلى $y = 3$ نزيكهبيټهوه كاتيځ
 x بېسنور زياددهكات بهو پاستههيلى دهوتريت دركهناړي ئاسويي بو رپوونكرندنهوهي نهخشهكه.

پيناسهي دركهناړي ئاسويي

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = a \quad \text{پاستههيلى } y = a \text{ دركهناړي ئاسوييه بو رپوونكرندنهوهي نهخشهي } f(x) \text{ نهمهش بهم شيويه خوارهوه}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = a \quad \text{يان}$$

لهلايهكي ترموه ئامانجهكان له بېپايان ههمان نهو سيفهتانهيان ههيه كه ئامانجهكان له $x = c$
ههياهه كه c ژمارهيكى راستيه ههروهه سيفهتي ديكي ههيه وهك

ئامانجهكان

- ئامانجه دياريكراوهكان
- له بېپايان ددوژيټهوه.
- دركهناړه ئاسوييهكاني
- رپوونكرندنهوهي نهخشه
- نهمهش بهم شيويه ددردهپرين، كاتيځ
- ئامانجه
- ديارينهكراوهكان له
- بېپايان ددوژيټهوه.

زاراوهكان

Vocabulary

دركهناړه ئاسوييهكان

Horizontal Asymptotes

دركهناړه ستوونيهكان

Vertical Asymptotes

ئامانجهكان له بىپايان

- ئەگەر r ژمارەيەكى پۆزەيى مۇجەب بىت، ئەوا $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{c}{x^r} = 0$
- ئەگەر r ژمارەيەكى پۆزەيى مۇجەب بىت، وئەگەر x^r لە بەھايەكانى x سالب بىناسەكرابىت ئەوا $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{c}{x^r} = 0$

نمونە 1

دۆزىنەوھى ئامانچ لە بىپايان

ئامانچى $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(5 - \frac{2}{x^2}\right)$ بدۆزەوھ.

شىكار بەپىي سىفەتەكانى ئامانجهكان و سەلمىنراوى پىشوو.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(5 - \frac{2}{x^2}\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 5 - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x^2} = 5 - 0 = 5$$

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(5 - \frac{2}{\sqrt{x}}\right)$ بدۆزەوھ.



نمونە 2

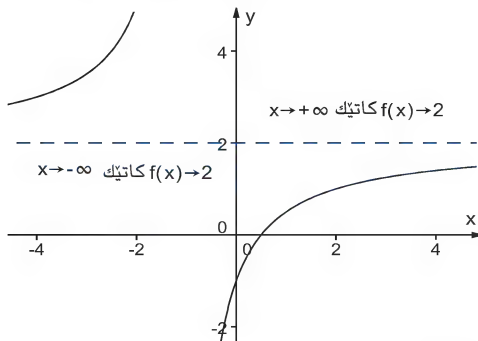
دۆزىنەوھى ئامانچ لە بىپايان

بدۆزەوھ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x-1}{x+1}$

شىكار سەرنجىدە ھەريەكە لەسەرەو ژىرە بەرەو $+\infty$ دەچىت كاتىك x بىسنور زىادەكات.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x-1}{x+1} = \frac{\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x-1)}{\lim_{x \rightarrow +\infty} (x+1)} \rightarrow \frac{+\infty}{+\infty}$$

ئەوھش بارىكە لەبارەكانى نادىار، بۆ شىكارى ئەو پرسىارە، واتە بۆ لابردنى نادىارى ھەريەكە لەسەرە و ژىرە بەسەر x دابەشكە.



$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x-1}{x+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x-1}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 - \frac{1}{x}}{1 + \frac{1}{x}}$$

$$\frac{\lim_{x \rightarrow +\infty} 2 - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x}}{\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x}} = \frac{2-0}{1+0} = 2$$

ھەرۋەھا راستەھىلى $y=2$ دەرەكانارى

ئاسۋىي نەخشەكەيە لەلای راست. ئەگەر بەدۋاى ئامانچى نەخشەكە بگەرپىت كاتىك x بىسنور كەمدەكات،

دەبىنىت كە $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x-1}{x+1} = 2$ و راستەھىلى $y=2$ ئەوېش دەبىتە دەرەكانارى ئاسۋىي نەخشەكە لەلای چەپ.

2. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2-2x+2}{2x^2+3x-2}$ بدۆزەوھ.



سوود

كاتىك شىۋەيەكى دىارينەكرات دىتە پىش وەك نمونە 2، سەرە وژىرە بەسەر ئەو x گەرەتەين ھىزى ھەيە لە ژىرەدا دابەشكە.

ئەم سی ئامانجی خوارەو بەدۆزەو.

ج $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3+5}{3x^2+1}$

ب $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2+5}{3x^2+1}$

ا $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x+5}{3x^2+1}$

شیکار

ا هەریەک لە سەرەو ژێر بەسەر x^2 دابەشکە.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x+5}{3x^2+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{2x}{x^2} + \frac{5}{x^2}}{3 + \frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{2}{x} + \frac{5}{x^2}}{3 + \frac{1}{x^2}} = \frac{0+0}{3+0} = 0$$

ب هەریەک لە سەرەو ژێر بەسەر x^2 دابەشکە.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2+5}{3x^2+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{2x^2}{x^2} + \frac{5}{x^2}}{3 + \frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 + \frac{5}{x^2}}{3 + \frac{1}{x^2}} = \frac{2+0}{3+0} = \frac{2}{3}$$

ج هەریەک لە سەرەو ژێر بەسەر x^2 دابەشکە.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3+5}{3x^2+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{2x^3}{x^2} + \frac{5}{x^2}}{3 + \frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + \frac{5}{x^2}}{3 + \frac{1}{x^2}} = \frac{+\infty}{3} = +\infty$$

بۆت دەردەکهوێت کە ئامانجی سییەم دیارینەکراوە، چونکە سەرەکی بێسنور زیادەدەکات، لەکاتی کدا ژێرەکی نەگۆرە.

دیاریکردنی دەرکەنارە ئاسۆییەکانی نەخشە پێژەییەکان کاتی ک کۆلکەییەکی هاوبەش نیوان سەرەو ژێر نەبێت

1. ئەگەر پلە سەرەو لەپلە ژێر کەمتر بێت، ئەوا راستەهێلی $y=0$ دەرکەناری ئاسۆیی نەخشەکەیه.
2. ئەگەر پلە سەرەو یەکسان بێت بەپلە ژێر، ئەوا راستەهێلی $y=\frac{a}{b}$ دەکاتە دەرکەناری ئاسۆیی نەخشەکە، کاتی ک a هاوکۆلکە سەرەو b هاوکۆلکە سەرەو ژێرە.
3. ئەگەر پلە سەرەو لەپلە ژێر زیاتر بێت، ئەوا نەخشەکە دەرکەناری ئاسۆیی نابێت.

3. ئایا نەخشە $f(x) = \frac{5x^3-2x^2}{x-2x^3}$ دەرکەناری ئاسۆیی هەیە ئەگەر وەلامەکەت بەلایە، هاوکۆلکە سەرەو بەدۆزەو.

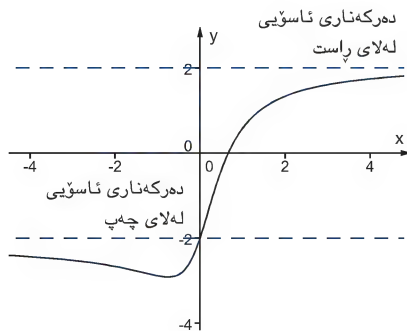


لە نموونەکانی پێشوو تێبینی ئەمانەت کرد: ئەگەر راستەهێلی $y=a$ دەرکەناری ئاسۆیی نەخشەکە بێت لەلای راست، ئەوا بەهەمان شێوە دەرکەناری ئاسۆیی نەخشەکە دەبێت لەلای چەپ. ئەمەش بۆ هەموو نەخشەییەکی پێژەیی راستە، بەلام بۆ نەخشەکانی تر راست نابێت، هەرەو لەنموونە 4 دەرکەوێت.

نمونه 4

نەخشەیهك دوو دەرکەناری ئاسۆیی جیاوازی ھەیە

ھەریەکە لەم دوو ئامانجی دیت بدۆزەو، دوو ھاوکێشە ھەردوو دەرکەنارە ئاسۆییەکە بۆ پوونکردنەوێ نەخشە $y = \frac{3x-2}{\sqrt{2x^2+1}}$ بدۆزەو.



ا $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x-2}{\sqrt{2x^2+1}}$

ب $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x-2}{\sqrt{2x^2+1}}$

شیکار

ا ئەگەر $x > 0$ دەتوانیت بنووسیت $x = \sqrt{x^2}$ و ئەگەر سەرەو ژێر بەسەر x دابەشیکەیت ئەوا

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x-2}{\sqrt{2x^2+1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{3x-2}{x}}{\frac{\sqrt{2x^2+1}}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{3-\frac{2}{x}}{1}}{\sqrt{2+\frac{1}{x^2}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3-\frac{2}{x}}{\sqrt{2+\frac{1}{x^2}}} = \frac{3-0}{\sqrt{2+0}} = \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

کەواتە $y = \frac{3\sqrt{2}}{2}$ بریتییه لە دەرکەناری ئاسۆیی لای راست.

ب ئەگەر $x < 0$ دەتوانیت بنووسیت $x = -\sqrt{x^2}$ و ئەگەر سەرەو ژێر بەسەر x دابەشیکەیت ئەوا

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x-2}{\sqrt{2x^2+1}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{3x-2}{x}}{\frac{\sqrt{2x^2+1}}{x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{3-\frac{2}{x}}{-1}}{-\sqrt{2+\frac{1}{x^2}}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3-\frac{2}{x}}{-\sqrt{2+\frac{1}{x^2}}} = -\frac{3-0}{\sqrt{2+0}} = -\frac{3}{\sqrt{2}} = -\frac{3\sqrt{2}}{2}$$

کەواتە $y = -\frac{3\sqrt{2}}{2}$ بریتییه لە دەرکەناری ئاسۆیی لای چەپ.

4. دەرکەنارە ئاسۆییەکانی نەخشە $f(x) = \frac{5x-3}{\sqrt{3x^2+2}}$ بدۆزەو.



ئامانجە دیارینەکراوەکان $\pm\infty$

زۆر نەخشە ھەیە بەھایەکانی لە ئامانجی دیاریکراو نزیک نابێتەو کاتی x بێسنوور زیادەکات یان کەمەکات. لەو نەخشانەش نەخشە پادەدارەکانە ئەو پێناسەی خوارەو بەکار دەھێنرێت بۆ باسکردنی سیفەتی نەخشە پادەدارەکان یان ئەوانی تر لە $\pm\infty$.

پێناسەی ئامانجە دیارینەکراوەکان لە $\pm\infty$

1. نووسینی $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ ئەو دەرەبەرێت کە بەھای $f(x)$ بێسنوور زیادەکات کاتی x بێسنوور زیادەکات.

2. نووسینی $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ ئەو دەرەبەرێت کە بەھای $f(x)$ بێسنوور کەمەکات کاتی x بێسنوور زیادەکات.

ھەردوو نووسینی $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ بەھەمان پێگا پێناسە دەکری.

نمونه 7

دۆزینه وهی ئامانجه کانی نهخشه سیگۆشه ییه کان له $\pm\infty$

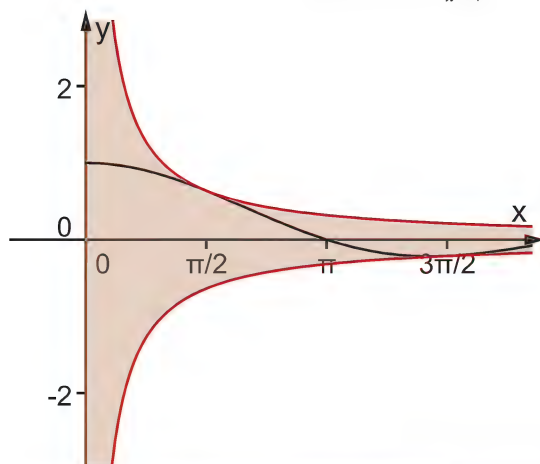
ئه نجامی ئه مانه ی دیت بدۆزه وه.

ب $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{x}$

ا $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin x$

شیکار

ا کاتیگ به های x به ئاراسته ی $+\infty$ زیاده کات، به های نه خشی $\sin x$ له نیوان -1 و 1 به بهرده وامی دووباره ده بیته وه بۆیه $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin x$ ئامانجی نییه.



ب له بهر ئه وهی $-1 \leq \sin x \leq 1$ و
له بهر ئه وهی $x > 0$ کاتیگ x له $+\infty$
نزیکه ده بیته وه، ئه و $-\frac{1}{x} \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{1}{x}$
به لام $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{1}{x} = 0$
که واته به پیی سه لمینراوی
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$ ئه و
ههروهک له وینه ی به رامبه ر
ده رده که ویت.

ب $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cos x}{x}$

ا $\lim_{x \rightarrow +\infty} \cos x$

7. ئه نجامی ئه مانه ی دیت بدۆزه وه.



راهیتان

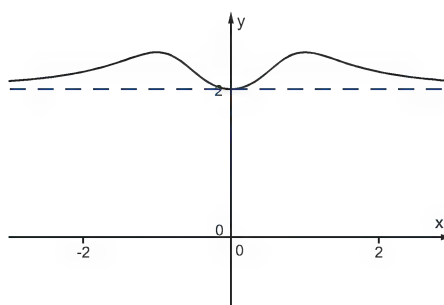
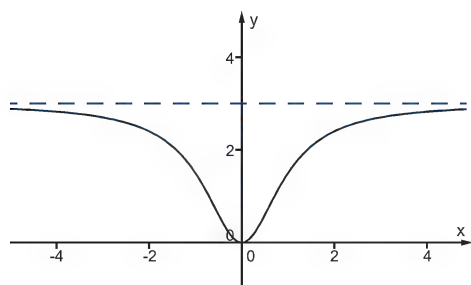
3-4

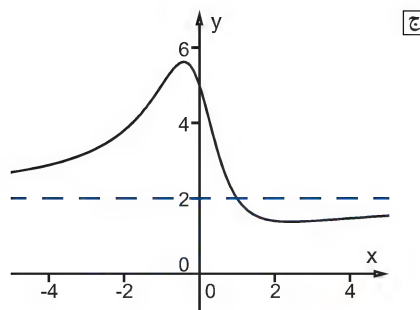
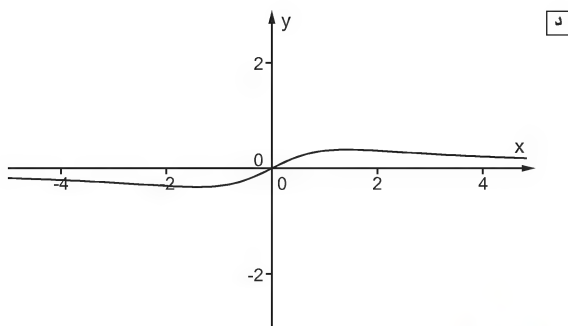
له راهیتانی 1 تا 2 به شیوازی خۆت پروونیکه وه.

2 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2$

1 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 4$

له راهیتانی 3 تا 6، پروونکردنه وهی هه ر نه خشیهک به به کارهیتانی ده رکه نار ه ئاسۆیه کان دیاریکه.





$$f(x) = \frac{3x^2}{x^2 + 2} \quad \text{4}$$

$$f(x) = \frac{x}{x^2 + 2} \quad \text{3}$$

$$f(x) = 2 + \frac{x^2}{x^4 + 1} \quad \text{6}$$

$$f(x) = \frac{2x^2 - 3x + 5}{x^2 + 1} \quad \text{5}$$

$$f(x) = 5x^3 - 3x^2 + 10 \quad \text{7} \quad \text{ئەنجامى ئەمانەى دىت بدۆزمە كاتىك}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x^4} \quad \text{ج}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x^3} \quad \text{ب}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x^2} \quad \text{ا}$$

له پرسىارى 8 تاكو 15 ئامانجه داواكراوهكه بدۆزمە.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^3 + 2}{9x^3 - 3x^2 + 7} \quad \text{9}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x - 1}{3x + 2} \quad \text{8}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{2}x - \frac{4}{x^2} \right) \quad \text{11}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x^2}{x + 3} \quad \text{10}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \cos \frac{1}{x} \quad \text{13}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 - x}} \quad \text{12}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin 2x}{x} \quad \text{15}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2x + \sin x} \quad \text{14}$$

دەربارەى جەمەكان

16 نەخشەى f بەردەوامە. پاسادانى $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 5$ دەكات. ئەگەر دەكرىت $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ لەم دووبارەدا بدۆزمە.

- ا) پروونكرندنەوى نەخشەى f ھاوجىيە لەگەل تەوهرى y .
ب) پروونكرندنەوى نەخشەى f ھاوجىيە لەگەل خالى بنەرەت.

له پرسىارى 17 تاكو 22 يەكترپرېنەكان لەگەل دوو تەوهرى پۆتانهكان و ھاوجىيەونەكان و دەركەنارەكان دياربەكه.

$$f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 9} \quad \text{19}$$

$$f(x) = \frac{x}{x^2 - 4} \quad \text{18}$$

$$f(x) = \frac{2+x}{1-x} \quad \text{17}$$

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 4}} \quad \text{22}$$

$$f(x) = 3 + \frac{2}{x} \quad \text{21}$$

$$f(x) = 2 - \frac{3}{x^2} \quad \text{20}$$

راست يان هەلە؟ له دوو پرسىارى 23 و 24، دياربەكه ئەگەر پستەكه راستە ھۆيەكەى ليكبدەوه ئەگەر ھەلەيه بە دژە نمونەيكە بيسەلمىتە.

23 ئەگەر $f'(x) > 0$ بەھای x ھەرچەندبىت، ئەوا نەخشەى f بېسنور پروو لە زیاد دەكات

24 ئەگەر $f'(x) < 0$ بەھای x ھەرچەندبىت، ئەوا نەخشەى f بېسنور كەمدەكات

تاقیکردنەوهی نیوهی بەش

1-4 ✓ پوو لەزیادبوون و پوو لەکەمبوونی نەخشەکان

1 ماوهکانی پوو لەزیادبوون و پوو لەکەمبوونی هەر نەخشەیکە دیاریبکە.

7 $f(x) = x + \cos 2x \left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right)$

8 $f(x) = \frac{2x}{x^2+1}$

9 $f(x) = x^3 - x$

2-4 ✓ بەهایەکانی کۆتایی

2 خستەیی گۆرپان بۆ هەریەکە لەم نەخشانەیی دیت دروستبکە و بەهایەکانی گەورەترین و بەهایەکانی بچووکتەترین خۆجێیەکی بدۆزەوه.

3 $f(x) = \sin^2 x \left(-\frac{\pi}{2} < x \leq \frac{\pi}{2}\right)$

4 $f(x) = \frac{x^3}{3} - x^2 - 3x$

2-4 ✓ خالەکانی وەرگەرپان

3 خالەکانی وەرگەرپان بۆ هەریەکە لەم نەخشانەیی دیت دیاریبکە، و ماوه کراوهکان کە نەخشەیکە تییدا قوۆزە یان قوۆپاوه دیاریبکە.

5 $f(x) = 2\cos(\pi x) \quad (0 \leq x \leq 2)$

6 $f(x) = 2x^3 - 3x^2$

4 بەهایەکانی هەریەکە لە a, b, c بدۆزەوه ئەگەر بزانی نەخشەیی $f(x) = ax^3 + bx^2 + a$ لە $x = -1$ خالی وەرگەرپانی هەیهو لیکەوتەکی لەو خالەدا بریتییه لە $y = -3x - 1$.

5 ئەگەر رستهکە راستە هۆیهکی لیکبدهوه، یان چهوته بهدره نمونه بیسهلمینه.

7 خالی $(1, 0)$ بریتییه لە خالی وەرگەرپانی نەخشەیی $f(x) = (x-1)^4$.

8 ئەگەر $f''(c) > 0$ ، ئەوا لاری لیکهوتی چهماوهی نەخشەیکە موجهبه له $x = c$.

3-4 ✓ ئامانجهکان له بیپایان

6 هەر ئامانجێک بدۆزەوه.

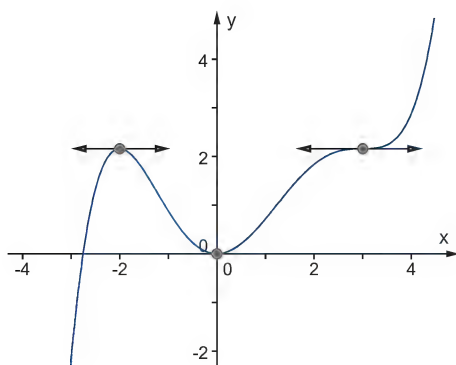
9 $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 - x - 1}{|x - 2|}$

10 $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{2x^2} - 1 + 3x \right)$

11 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(1-2x)^2}{2x^2+1}$

3-4 ✓ خستەیی گۆرپان

7 له وینەیی بهرامبەر پوونکردنەوهی نەخشەیی $f(x)$ دەردهکهوێت. خستەیی خواروه تهواویکە بهدیاریکردنی نیشانهکانی هەر بەهایەک (موجهب، سالب، سفر).



$f''(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	
			$x = -2$
			$x = 0$
			$x = 3$
			$x = -3$
			$x = 4$

وینە پروونکردنەوهییهکانی نهخشە

Curve Sketching

4-4

شیکردنەوهی پروونکردنەوهی نهخشەکان

ناکریت گرنگی بەکارهێنانی پروونکردنەوهی نهخشەکان لەبیرکاریدا فرامۆش بکریت، ئەندازەیی شیکردنەوهی که زانای فرەنسی دیکارت دایهێنا، بۆ پێشخستن و هەژمارکردنی جیاکاری و تەواوکاری لە ناوهراستی سەدهی حەفدهم سەرەتای ئەم پێشکەوتنە بوو، و لەسەر ئەم کارەش زانای بیرکاری فرەنسی لاگرانج ئەمەیی بەم شیۆهیه دەربەری «کاتیک جەبرو ئەندازە هەریهکهیان لە خولگەیی تایبەتی خۆی کاریان دەکرد، پێشکەوتنی هەریهکهیان لەسەر خۆ بوو و جێبهجێکردنەکانیان کەمبوو. بەیهک گەشتنێان بوو هۆی تەواوکەرو بەهێزکردنی هەریهکهیان بۆ ئەوی تریان».

تاكو ئیستا زۆر لە چەمکەکان فێربوویت که لە شیکردنەوهی پروونکردنەوهی نهخشەکان یارمەتیتەدات.

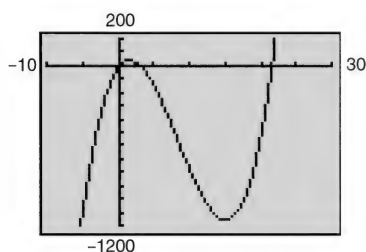
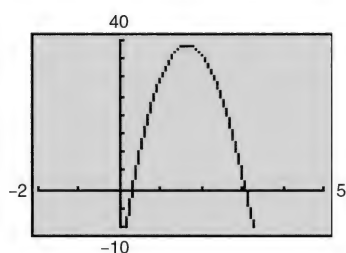
- یەکتەرپرینەکان لەگەڵ دوو تەوهری پۆتانهکان.
- هاوجیبوون.
- بوار و مەودا (لە هەندێ لە بارەکاندا)
- بەردەوامی.
- دەرکەنارە ستوونییهکان.
- داتاشارو.
- بەهایهکانی کۆتایی خۆجیی.
- خالەکانی وەرگەڕان.
- دەرکەنارەکان.
- ئامانجەکان لە بێپایان.

ئامانجەکان

- نهخشە شیدەکاتەوه و پروونکردنەوهی دهکیشیت.

زاراوهکان Vocabulary

دەرکەناری لار
Slant Asymptote



کاتیک وینەیی پروونکردنەوهی نهخشە بەدەست «یان بەبژمیری پروونکردنەوهی» دهکیشیت، ئەوه بزانه که وینەیی بەشیک لە چەماوهکه دهکیشیت، و ناتوانیت وینەکه بەتەواوی بکیشیت برپاردانت بۆ دیاریکردنی ئەو بەشەیی لە پروونکردنەوهکه که دهکیشیت برپاریکی گرنگه. سەیری هەردوو وینەیی بەرامبەرکه، بەرای تۆ کامیان بەشیۆهیهکی باشتەر نهخشەیی $f(x) = x^3 - 25x^2 + 74x - 2$ دەنوینیت؟

ئاشکرایه که وینەیی دووهم نهخشەکه بەشیۆهیهکی باشتەر دەنوینیت، بەلام ئایا وینەیی سییەم هیه که بەشە گرنگەکانی پروونکردنەوهی نهخشەکه دەربخات؟ بۆ وهلامدانەوهی ئەم پرسپاره پیویستت بە بەکارهێنانی جیاکاری دەبیت بۆ ئەوهی داتاشاروی یەکهەم و داتاشاروی دووهمی نهخشەکه لیکبەیتەوه.

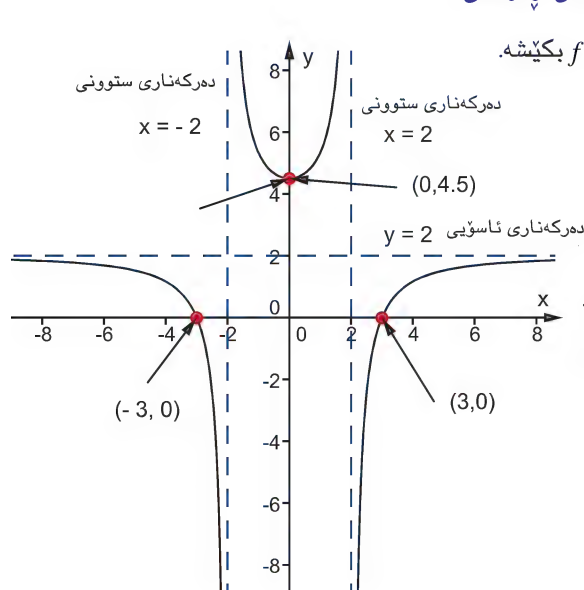
ئەمانەى دېت چەند رېنمايەكە، بۇ ئەۋەى ئەۋ بەشەى لە پرونكرنەۋەى نەخشەكە لەۋىنەكەت دەردەكەۋىت ديارىكرنەىكى باش بېت، پېۋىستە بەشەكە ئەۋانەى لەم رېنمايانە ھاتوۋە دەرىخات.

رېنمايەكانى شىكرنەۋەى پرونكرنەۋەى نەخشەكە

1. بۋار و مەۋداى نەخشەكە ديارىكە.
2. يەكترېنەكانى نەخشەكە لەگەل ھەردوۋ تەۋەرى پۋوتانەكان و دەركەنارەكان و ھاۋجېۋون ديارىكە.
3. بەھايەكانى x كە $f'(x)$ و $f''(x)$ دەكاتە 0 يان بوۋنى نىيە، ديارىكە، ئەم ئەنجامانە بۇ ديارىكرنەى بەھايەكانى كۆتايى خۇجېى و خالەكانى ۋەرگەپانى نەخشەكە بەكاربەھنە.

نمونه 1

ۋىنەكىشانى پرونكرنەۋەى نەخشەى پېژەى



پرونكرنەۋەى نەخشەى $f(x) = \frac{2(x^2 - 9)}{x^2 - 4}$ بكىشە.

شىكار

داتاشراۋى يەكەم: $f'(x) = \frac{20x}{(x^2 - 4)^2}$

داتاشراۋى دوۋەم: $f''(x) = \frac{-20(3x^2 + 4)}{(x^2 - 4)^3}$

يەكترېنە ئاسۋىيەكان: $(3, 0)$ و $(-3, 0)$

يەكترېنە ستونىيەكان: $(0, \frac{9}{2})$

دەركەنارە ستونىيەكان: $x = 2$ و $x = -2$

دەركەنارە ئاسۋىيەكان: $y = 2$

بەھايە شلۇقەكان: $x = 0$

خالەكانى ۋەرگەپان: نىيە.

بۋارەكەى: ھەموو ژمارە راستىيەكان جگەلە 2 و

ھاۋجېۋون: ھاۋجېيە لەگەل تەۋەرى y

ماۋەكانى تاقىكرنەۋە و بەھايەكانى $[-\infty, -2]$, $[-2, 0]$, $[0, 2]$, $[2, +\infty]$

ئەم خشتەى خوارەۋە چۆنىەتى بەكارھىنانى ماۋەكان و بەھايەكانى تاقىكرنەۋە نىشانەدات

بۇ ديارىكرنەى سىفەتەكانى پرونكرنەۋەى نەخشەكەى سەرەۋە.

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	سىفەتەكانى چەماۋەكە
$-\infty < x < -2$		-	-	پرو لەكەمبۋونە، قۇقرە
$x = -2$	پېناسەنەكراۋە	پېناسەنەكراۋە	پېناسەنەكراۋە	دەركەنارى ستونى
$-2 < x < 0$		-	+	پرو لەكەمبۋونە، قۇپاۋە
$x = 0$	4.5	0	+	بەھاي بچوۋكترىن خۇجېى
$0 < x < 2$		+	+	پرو لەزىادبۋونە، قۇپاۋە
$x = 2$	پېناسەنەكراۋە	پېناسەنەكراۋە	پېناسەنەكراۋە	دەركەنارى ستونى
$2 < x < +\infty$		+	-	پرو لەزىادبۋونە: قۇقرە

دَلْنیابه که له مه به سستی دروستکردنی خشته ی پېشوو تیگه یشتیت. به سود وهرگرتن له جیاکاری ده توانیت دَلْنیابیت له ووی که پروونکردنه ووی نه خشه که به هایه کانی کۆتایی یان خاله کانی وهرگه پانی نییه، جگه له وانه ی که له خشته که دا هاتوو.

1. وینه ی پروونکردنه ووی نه خشه ی $f(x) = \frac{3(x-2)}{x^2-1}$ بکیشه.



وینه کیشانی پروونکردنه ووی نه خشه یه کی پێژیه یی

نمونه 2

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x + 4}{x - 2} \text{ بدۆزه و.}$$

شیکار

$$f''(x) = \frac{8}{(x-2)^3} \text{ داتا شراوی دووهم:}$$

یه کتر برینه ستوونیه کانی: $(0, -2)$

دهرکه ناره ئاسوویه کانی: نییه

خاله کانی وهرگه پان: نییه

$$f'(x) = \frac{x(x-4)}{(x-2)^2} \text{ داتا شراوی یه که م:}$$

یه کتر برینه ئاسوویه کانی: نییه.

دهرکه ناره ستوونیه کانی: $x = 2$

به هایه شلۆقه کانی: $x = 0$ و $x = 4$

بواره کانی: هه موو ژماره راسته ییه کانه جگه له $x = 2$.

ماوه کانی تاقیکردنه ووی به هایه کانی $[-\infty, 0]$, $[0, 2]$, $[2, 4]$, $[4, +\infty]$ ئهم نه خشه یه چۆنیه تی به کاره یانی ماوه کانی و به هایه کانی تاقیکردنه ووی نیشانداده تی بۆ دیاریکردنی سیفه ته کانی پروونکردنه ووی نه خشه که.

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	سیفه ته کانی چه ماوه که
$-\infty < x < 0$		+	-	پوو له زیاده بوونه، قۆزه
$x = 0$	-2	0	-	به های گه وره ترین خۆجیی
$0 < x < 2$	-	-	-	پوو له که مبوونه، قۆزه
$x = 2$	پیناسه نه کراوه	پیناسه نه کراوه	پیناسه نه کراوه	دهرکه ناری ستوونی
$2 < x < 4$		-	+	پوو له که مبوونه، قۆپاوه
$x = 4$	6	0	+	به های بچوو کترین خۆجیی
$4 < x < +\infty$		+	+	پوو له زیاده بوونه، قۆپاوه

دهرکه ناره لارییه کانی

له نمونه ی 2 چه ماوه ی نه خشه که دهرکه ناری ئاسووی نییه، به لام دهرکه ناری لاری هیه. پروونکردنه ووی نه خشه پێژیه که (که له نیوان سه رو ژیره که ی هاوکۆله ی هاویه ش نییه، پله ی ژیره که ی له 1 که متر نییه) دهرکه ناری لاری هیه ئه گه ر پله ی سه ره که ی له پله ی ژیره که ی به 1 زیاده ییت، بۆ دۆزینه ووی دهرکه ناره لاره که. دابه شی درێژ به کار به یینه بۆ نووسینی هاوکیشیه ی نه خشه که وه ک سه رجه می راده داری له پله یه که له گه ل نه خشه یه کی تری پێژیه یی که پله ی سه ره که ی له پله ی ژیره که ی که متر ییت.

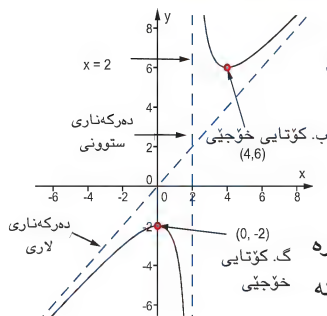
هاوکیشیه ی نه خشه که بنووسه.

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x + 4}{x - 2}$$

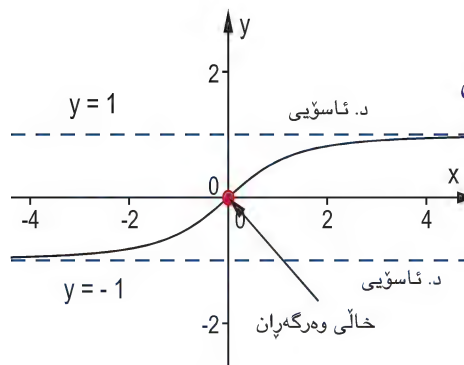
دوای دابه شکردنه که نه خشه که بنووسه و.

$$f(x) = x + \frac{4}{x-2}$$

پروونکردنه ووی به رامبه ر پوخته ی پیدراوه کانی خشته ی سه ره و دهرکه ناره لاره که ی $y = x$



2. وینەى پروونکردنەوێ نهخشهى $f(x) = \frac{3x^2 - 5x + 3}{3x - 2}$ بکێشه.



وینەکێشانی پروونکردنەوێ نهخشهى پرهى

وینەى پروونکردنەوێ نهخشهى $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 2}}$ بکێشه.

شیکار

$$f'(x) = \frac{2}{(x^2 + 2)^{\frac{3}{2}}} \text{ و } f''(x) = -\frac{6x}{(x^2 + 2)^{\frac{5}{2}}}$$

پروونکردنەوێكه يهك يهكترپرينى له خالى $(0,0)$ دا ههيه، دهرکه ناری ستوونى نيه به لام دوو دهرکه ناری ئاسۆيى ههيه. $y = 1, y = -1$ نهخشهكه به ههيهکانى شلۆقى نيه. له وانهيه خالێكى وهرگه پانی له $x = 0$ دا هه بێت بوارى نهخشهكه بریتیه له کۆمهلهى هه موو ژماره راستیهکان پروونکردنەوێكه له گهڵ خالى بنه پهرت هاوجییه.

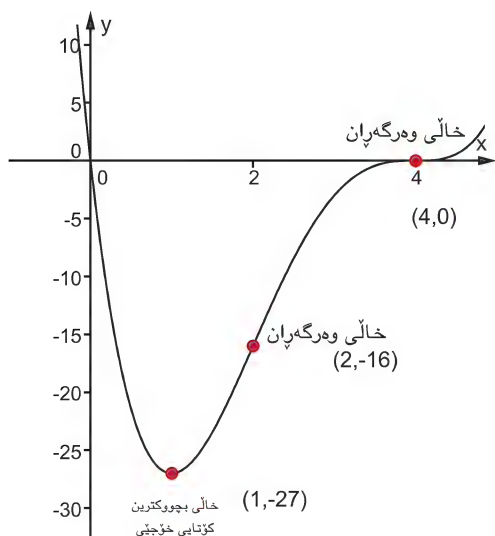
x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	سيفهتى پروونکردنەوێ
$-\infty < x < 0$		+	+	پوو له زيادبوونه، قۆپاوه
$x = 0$	0	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	0	خالى وهرگه پان
$0 < x < +\infty$		+	-	پوو له زيادبوونه، قۆقره

3. وینەى پروونکردنەوێ نهخشهى $f(x) = \frac{-2x}{\sqrt{x^2 + 2}}$ بکێشه.



کێشانی پروونکردنەوێ نهخشه زۆر پاده دارهکان

پروونکردنەوێ نهخشهى $f(x) = x^4 - 12x^3 + 48x^2 - 64x$ بکێشه.



شیکار

داتاشراوى يهكهم: $f'(x) = 4(x-1)(x-4)^2$

داتاشراوى دووهم: $f''(x) = 12(x-4)(x-2)$

يهكترپرينه ئاسۆيهکان: $(0,0)$ و $(4,0)$

يهكترپرينه ستوونيهکان: $(0,0)$

دهرکه ناره ستوونيهکان: نيه.

دهرکه ناره ئاسۆيهکان: نيه.

سيفهتهكهى له $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

دوو بهها شلۆقهکان: $x = 1$ و $x = 4$

خالى وهرگه پان: $x = 2$ و $x = 4$

بوارهكهى: کۆمهلهى ژماره راستیهکان.

ماوهکانى گۆپان به ههيهكهى: $[-\infty, 1], [1, 2], [2, 4], [4, +\infty]$

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	سیفہتی پروونکردنہوہ
$-\infty < x < 1$		-	+	پوولہ کہمبون، قوایاوه
$x = 1$	-27	0	+	بہہای بچوکتترین خوچئی
$1 < x < 2$		+	+	پوولہ زیادبون، قوایاوه
$x = 2$	-16	+	0	خالی وەرگہران
$2 < x < 4$		+	-	پوولہ زیادبون، قوایاوه
$x = 4$	0	0	0	خالی وەرگہران
$4 < x < +\infty$		+	+	پوولہ زیادبون، قوایاوه

نہخشہی رادہداری نمونہی 4 بہہای بچوکتترین خوچئی ہہیہ و بہہای گہورہترین خوچئی نییہ، بہشیوہیہکی گشتی، بو نہخشہیہکی رادہداری پلہ n دہکریٹ بہلایہنی زور $n-1$ بہہای کوٹایی خوچئی و بہلایہنی زور $n-2$ خالی وەرگہرانی ہہیٹ. سہرہرای ئہمہش نہخشہ رادہدارہ پلہ جووتہکان بہلایہنی کہم بہہای کوٹایی خوچئیان ہہیہ.

ئہوہی لہپولی دہیہم لہ نہخشہ رادہدارہکان خویندوتہ بہبیرخوت بہینہوہ، کہ سیفہتی نہخشہ لہ بپایان بہ پلہی نہخشہک و نیشانہی هاوکولگہی سہرہکی دیاردہکریٹ، چہماوہی نہخشہی نمونہ 4 بہنزیك بوونہوہ لہ $+\infty$ بیسنور زیاددہکات چونکہ هاوکولگہ سہرہکیہکەى موجدہبہ. و بہنزیك بوونہوہ لہ $-\infty$ بیسنور زیاددہکات. چونکہ پلہی نہخشہک جووتہ.

4. وینہی پروونکردنہوہی $f(x) = 5x^3 - 15x$ بکیشہ.



وینہکیشانی پروونکردنہوہی نہخشہ سیگوشہیہکان

نمونہ 5

وینہی چہماوہی $f(x) = \frac{1 - \sin x}{\cos x}$ بکیشہ.

شیکار

لہبہرئہوہی نہخشہک دویارہبوونہوہیہ و ماوہی دویارہبوونہوہکەى 2π ، دہتوانیت لہ نہخشہک بکولییہوہ لہ ماوہیہک کہ مہوداکەى 2π بیٹ، ماوہی $[\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ - ہلہبژیرہ.

بوار: کوئمہلہی ژمارہ راستییہکان جگہ لہ $x = \frac{\pi}{2} + n\pi$ کاتیک $n \in \mathbb{I}$

$$f'(x) = \frac{\sin x - 1}{\cos^2 x} \quad \text{داتاشراوی یہکہم} \quad f''(x) = \frac{(1 - \sin x)^2}{\cos^3 x} \quad \text{داتاشراوی دووہم}$$

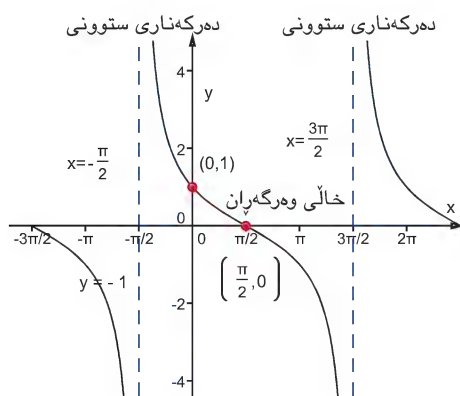
ماوہی دویارہبوونہوہ: 2π یہکتربرینہ ئاسویہکان: $(\frac{\pi}{2}, 0)$ یہکتربرینہ ستوونیہکان: $(0, 1)$

دہرکہنارہ ستوونیہکان: $x = -\frac{\pi}{2}$ دہرکہناری ئاسوی: نییہ بہا شلوقةکان: نییہ

خالہکانی وەرگہران: $x = \frac{\pi}{2}$

ماوہکانی گورن و بہہایہکەى $[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$ ، $[\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ ، $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	سيفهتی پوونکردنه وه
$x = -\frac{\pi}{2}$	پیناسه نه کراوه	پیناسه نه کراوه	پیناسه نه کراوه	دهرکه ناری ستوونی
$-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$		-	+	پوو له که مېوون، قوږپاوه
$x = \frac{\pi}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	0	خالۍ وەرگه پان
$\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$		-	-	پوو له که مېوون، قوږزه
$x = \frac{3\pi}{2}$	پیناسه نه کراوه	پیناسه نه کراوه	پیناسه نه کراوه	دهرکه ناری ستوونی



5. وینهی پوونکردنه وهی $f(x) = \frac{1 + \cos x}{\sin x}$ بکښه.



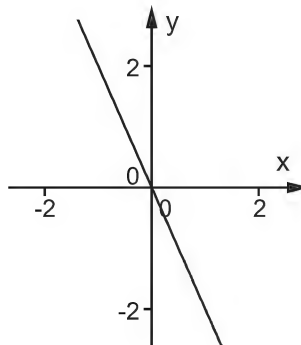
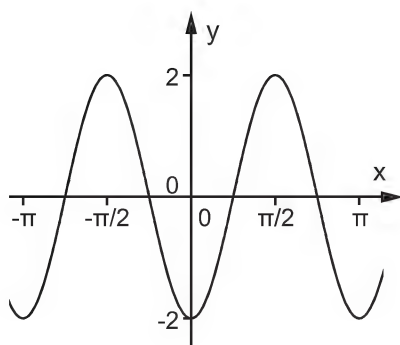
راهینان

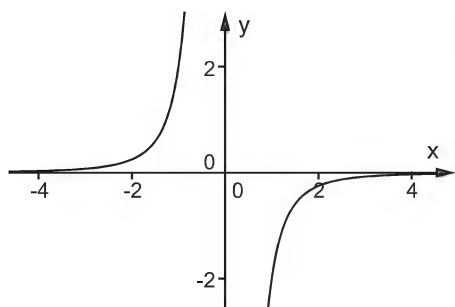
4-4

پوونکردنه وهی داتاشراوی هه نه خشه یه ک دياربکه.

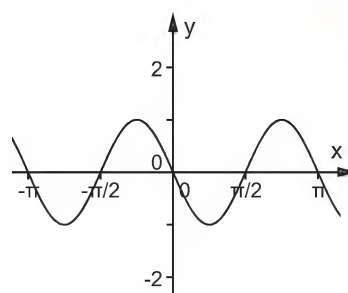
1 داتاشراوه کی

1 نه خشه

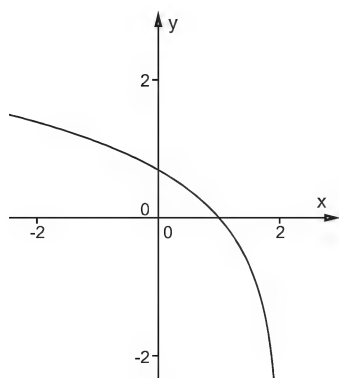




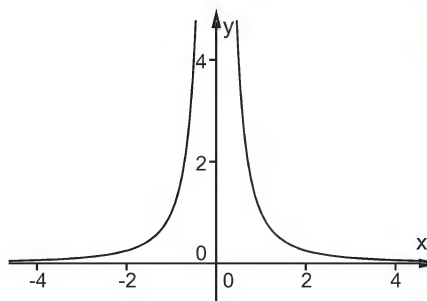
ب



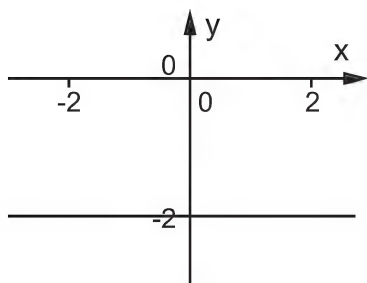
2



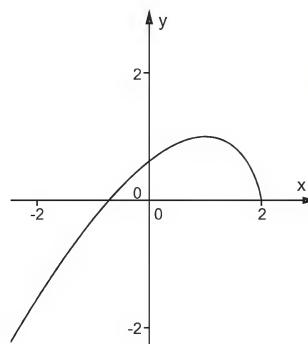
ع



3



د

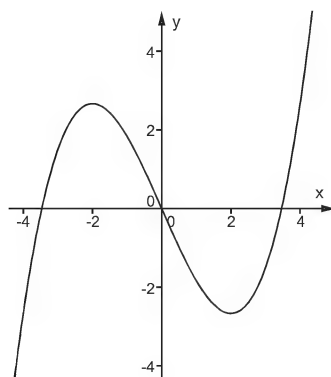


4

5 **خویندنه‌وه‌ی پروونکردنه‌وه‌کان** ئەم وینە‌ی خواره‌وه پروونکردنه‌وه‌ی نه‌خشە‌ی f یدە‌ده‌خات.

ا کام له به‌هایه‌کانی x واده‌کات به‌های $f'(x)$ بکاته 0؟ بکاته موجه‌ب؟ بکاته سال‌ب؟

ب کام له به‌هایه‌کانی x واده‌کات به‌های $f''(x)$ بکاته 0؟ بکاته موجه‌ب؟ بکاته سال‌ب؟



ج له کام ماوه‌دا $f'(x)$ پوو له‌زیادبوونه؟

د کام به‌های x واده‌کات $f'(x)$ به‌های بچوو‌کت‌ترینی هه‌بیت؟ به‌راورد له نیوان تیک‌رای گۆ‌پانی f له‌و به‌هایه‌دا له‌گه‌ل تیک‌رای گۆ‌پانی f له به‌هایه‌کانی تری x بکه. وه‌لامه‌که‌ت پروون‌که‌وه.

له راهینانی 6 تاكو 17 وینه پوونكردنهووی نهخشهكه بكیشه.

$$f(x) = \frac{x^2+1}{x^2-9} \quad \boxed{7}$$

$$f(x) = \frac{x^2}{x^2+3} \quad \boxed{6}$$

$$f(x) = \frac{x^2+1}{x} \quad \boxed{9}$$

$$f(x) = x + \frac{4}{x^2+1} \quad \boxed{8}$$

$$f(x) = x\sqrt{4-x} \quad \boxed{11}$$

$$f(x) = \frac{x^2-6x+12}{x-4} \quad \boxed{10}$$

$$f(x) = 2 - x - x^3 \quad \boxed{13}$$

$$f(x) = 3x^{\frac{2}{3}} - 2x \quad \boxed{12}$$

$$f(x) = |2x-3| \quad \boxed{15}$$

$$f(x) = 3x^4 + 4x^3 \quad \boxed{14}$$

$$f(x) = x\sqrt{9-x^2} \quad \boxed{17}$$

$$f(x) = (x-1)^5 \quad \boxed{16}$$

18 ئایا پوونكردنهووی نهخشهكه يهكك له دركه ناره ستوونیهكانی دهبریت؟ وهلامهكهت پوونكهوه

19 ئایا پوونكردنهووی نهخشهكه يهكك له دركه ناره ئاسوویهكانی دهبریت؟

20 هاوكیشهی نهخشهی $f(x) = \frac{6-2x}{x-3}$ وا ئاماژه دهكات يه دركه ناری ستوونی ههیه. هاوكیشهكهی

بنووسه؟ وینهی پوونكردنهووی ئهم نهخشه بكیشه و بیسهلمینه پوونكردنهووی نهخشهكه دركه ناری ستوونی نییه چون ئهمه لیکده دهیتوه؟

بیركهوه له ههردوو پرسباری 21 و 22 ئهو نهخشهی ئهم مهرجانهی خوارهووی تیدا

به دیدهكریت بدۆزهوه.

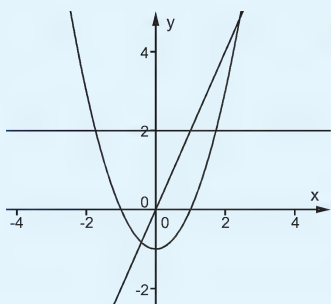
21 نهخشهیهك دركه ناری ستوونی كه هاوكیشهكهی $x = 5$ و دركه ناری ئاسویی هاوكیشهكهی

$y = 0$ ههیت.

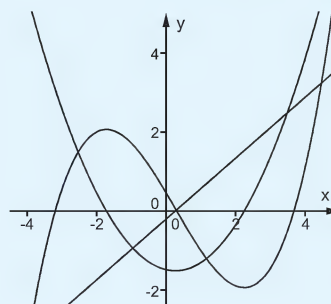
22 نهخشهیهك دركه ناری ستوونی $x = 5$ و دركه ناری لار كه هاوكیشهكهی $y = 3x + 2$ ههیت.

دەربارەى چەمكەكان

له دوو راهینانی 23 و 24 له وینه پوونكردنهووهكان نهخشهی $f(x)$ و داتاشراوی يهكهم $f'(x)$ و داتاشراوی دووهم $f''(x)$ دهردكهویت، پوونكردنهووهكانی نهخشهكهو داتاشراوی يهكهم و داتاشراوی دووهم جیاكهوه.



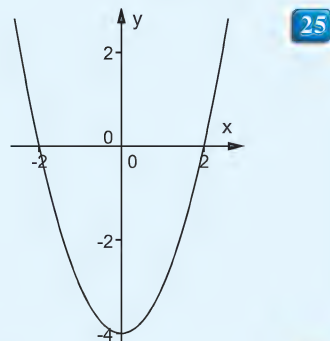
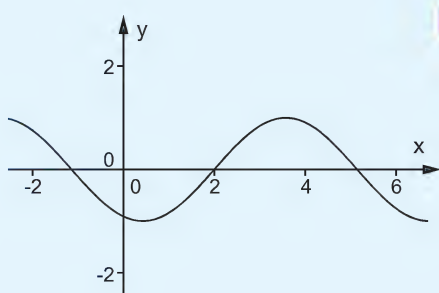
24



23

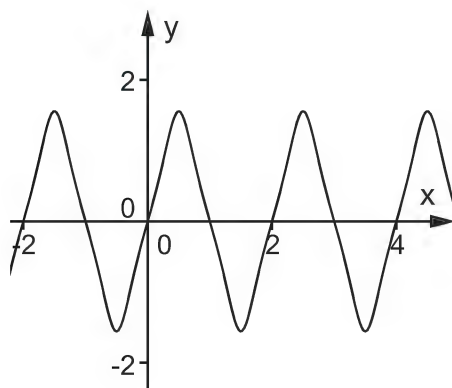
دەربارەى چەمكەكان

لە دوو پراھینانی 25 و 26 وینەى پوونکردنەوەى نەخشەى $f(x)$ بەھۆى پوونکردنەوەى داتاشراوى یەكەم $f'(x)$ بکێشە.



27 وا دابنێ كە $f'(x) < 0$ لە ماوەى $[2, 8]$. پوونكەوە بۆچی $f(3) > f(5)$ ؟

28 خوێندنەوەى پوونکردنەوەكان پوونکردنەوەى خوارووە بریتییه لە پوونکردنەوەى نەخشەى $f(x) = \tan(\sin \pi x)$.



- ا ئایا وینە پوونکردنەوەكە هاوجییە؟ ئەگەر وایە جوۆرى هاوجیبوونەكە دیاریبکە.
- ب ئایا نەخشەكە دووبارەبوونەوێه؟ ئەگەر وایە ماوەى دووبارەبوونەوێهكەى دیاریبکە.
- ج بەهایەكانى كۆتایی بۆ نەخشەكە لە ماوەى $[-1, 1]$ دیاریبکە.
- د ئایا نەخشەكە خالى وەرگەپانى لە ماوەى $[0, 1]$ هەیه. ژمارەیان چەندە؟

گهړان بهدوای بهها کوټایهکاندا

Optimization

نماښهکان

- پرسپارهکانی
- دیاریکردنی بههایهکانی
- بچوکترین یان
- بههایهکانی گهورهترین
- شیکاردهکات.

پرسپاری بههایهکانی بچوکترین و بههایهکانی گهورهترین

شیکارکردنی پرسپارهکانی گهورهترین کوټای و بچوکترین کوټای، بهیهکی له گرنګترین جېبهجېکردنهکانی ههژمارکردنی جیاکاری و تهواوکاری دادهنریت. بی گومان گوښیستی دهستهواژهکانی وهک گهورهترین قازانج یان کهمترین تیچوون و گهلېکی تر و زوری تر گوښیستی بویت. پېش نهوهی بهفراوانی بچینه ناو نهو بابهته لهسهر نهو نمونه دهوستین.

دیاریکردنی گهورهترین قهبارهی قووتویهک

1 نمونه

نهاندازیاریک لهیهکی له کارگهکان دیزاینی قووتویهکی سهرکراوهی بنکه چوارگوشه دهکات بو نهوهی پروبههکه 675 cm^2 بیټ، وهک لهویټنه لای پاست دردهکهوټ. پېوانهکانی دووریهکان بدوزهو بو نهوهی قووتویهک گهورهترین قهبارهی ههبیټ؟

شیکار

لهبهرنهوهی بنکهی قووتویهک چوارگوشهیه قهبارهکهی دهبیټ $V = x^2 h$ بهو هاوکېشه دهوتریت هاوکېشه سهرکی پرسپارهکه، چونکه پهیوهندیهکمان پیدهدات، بو ههژمارکردنی بهها گهورهترینهکهی، له لایهکی تر پروبهی قووتویهک دهکاته سهرجهمی پروبهی بنکهکهی لهگهل چوار تهنیشته پروبههکانی واتا $S = x^2 + 4xh$ ، بهلام پروبهی قووتویهک پیویسته بکاته 675 cm^2 نهوهش پهیوهندیهک لهنیوان لایهکی بنکهکهی x و بهرزیهکهی h پیکدههینیت.

$$S = x^2 + 4xh = 675$$

$$\text{لهوهوه دردهچیت که } h = \frac{675 - x^2}{4x} \text{ و } V = x^2 \left(\frac{675 - x^2}{4x} \right) = \frac{675}{4}x - \frac{x^3}{4}$$

پېش دیاریکردنی بههایهکانی x که گهورهترین قهباره دابین دهکات، بواری بهسود دیاریکه، واتا نهو بههایانهی x دهتوانیت وهریگریت. دهزانیت بههای x سالب نییه و پروبهی بنکهکهی x^2 له 675 تیپهپناکات، واتا $0 < x \leq \sqrt{675}$.

بو نهوهی نهاندازیارهکه گهورهترین قهبارهی دهستکهوټ دهبیټ بههایهکانی x دیاریکات کهوادهکات نهخشه $V(x) = \frac{675x - x^3}{4}$ گهورهترین بهها وهریگریت، بو نهوهش دهستکه به دوزینهوهی داتاشراوهکه $V'(x)$ و شیکارکردنی هاوکېشه $V'(x) = 0$.

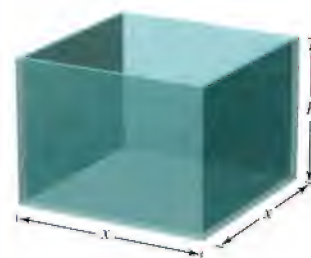
$$V'(x) = \frac{675 - 3x^2}{4} = 0$$

$$3x^2 = 675$$

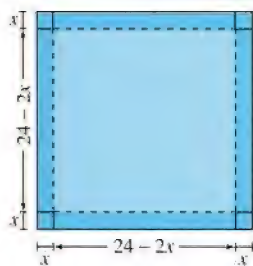
$$x^2 = 225$$

$$x = 15 \text{ یان } x = -15$$

بههای دوو شلوقهکه بریتیین له $x = -15$ و $x = 15$ پیویسته بههای $x = -15$ فهراموشکههیت چونکه x سالب نییه. بو دلنیا بوون لهبههای شلوقی $x = 15$ دهگهړیتهوه بو بههای گهورهترینی نهخشهکه، تاقیکردنهوهی داتاشراوهی دووهم بهکاربهښنه، داتاشراوهی دووهمی نهخشهکه دهکاته $V''(x) = -\frac{3}{2}x$ و بههایهکهی له $x = 15$ دهکاته $V''(15) = -\frac{3}{2}(15) = -\frac{45}{2} < 0$ کهواده نهو خاله شلوقه بو بههای گهورهترین خوځی نهخشهکه دهگهړیتهوه.



ئەندازىيارەكە بۇ لايەكى بىنكەى قوتوتەكەى 15 cm و بۇ بەرزىيەكەى $h = \frac{675-15^2}{4 \times 15} = 7.5$ ھەلدەبېژىت، گەورەترىن قەبارە دەكاتە $V_{\max} = 15 \times 15 \times 7.5 = 1687.5 \text{ cm}^3$



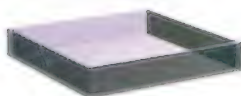
1. ئەندازى يارىك لەيەك لە كارگەكان
 دىزايىن بۇ قووتويەكى بى سەر
 پۇشى بىنكە چوارگۆشە دادەنىت،
 بە بەكارهينانى پارچە كارتۇنىك
 درىژى لايەكى 24 cm بوو

برپنی 4 چوارگۆشه له گۆشه کانیوه که x درێژی هەر لایه کیانه، پاشان نوشتاندنه و دی لایه کانی، ئەنداز یار که پێویسته چ به هایه که بۆ x هەلبژێریت بۆ ئەو دی قوو ته که گه وره تر بن قه باره ی هه ییت.

به گه پانه وه بۆ نمونه 1 پيش دهست به شيكار كردن پيويسته نه وه بزانيته زور قوتو ههيه
 پووبه رهمه كى بگاته 675 cm^2 ، دهستبكه به پرسيار كردن له شيوى قوتو هكه كه گه وره ترين
 قهبارى ههيه؟ ئايا به رزه يان نزمه يان له خستهك نزىكه.



له‌وانه‌یه چاکتر بێت له‌سه‌ره‌تاوه
قه‌باره‌ی ژماره‌یه‌که له‌ قووتو
هه‌ژمار بکه‌یت، هه‌روه‌که له‌و پنه‌کان
ده‌رده‌که‌ون بۆ ئه‌وه‌ی بپروکه‌یه‌کی
نزیکت له‌ شیکاره‌که لا دروست بێت.
ئه‌وه‌ بزانه‌ که ناتوانیت ده‌ست
به‌ شیکاری پر سياره‌که بکه‌یت ئه‌گه‌ر
نه‌زانیت داواکراوه‌که جیبه‌؟



ئەمانەتى خوارمۇدە ئەو ھەنگاۋە
گەشتىنەيە كەينىۋىستە بېرى ھەلىستىت بۇ شىكار كىردى، ئەم ھۆرە پىرسىپارەنە.

بۇ شىكار كۈندى يىسىياريك لى يىسىياريە كىيى بىھى كۆتايىيە كىيى

1. هه‌موو ئەو بە‌هایانە‌ی کە‌دراو‌ه و ئەو بە‌هایانە‌ی داواکراو‌ه دیاریکە وێنە‌کە بکێشە ئە‌گەر توانیت.

2. هاوکیشی سهرکی بۆئو بره‌ی که پیویسته هه‌ژماری به‌های کۆتایی به‌کیت بنووسه.

3. ھاوکیښی یه کهم بنووسه وه به مەرچیک ھاوکیښه نوییبه که تنهها یه که گورای نازاد له خو
بگریټ، له وانه یه پویستیت به ھاوکیښه لاوکییه کان هه بیټ که گوراه نازاده کانی ھاوکیښی
سهره کی به یه که وه ده به ستټه وه

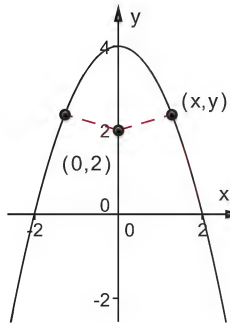
4. ماوهی به سوود بۆ هاوکیشی سهرکی دیاریبکه، واتا به های ئه گوپراوانهی وا دهکات پرسپاره که مانای هه بێت دیاریبکه.

5. به‌های‌گه‌ورترین یان به‌های بچو و کترین داواکراو به به‌کار هیئانی ته‌کنیکه‌کانی هه‌ژمارکردنی، حیاکاری که له وانه‌کانی، بیشتَر فیرِ بیویت دیارِ بیکه.

دۆزىنەۋەي كورتىن دوورى

ئەو خالانەى سەر برگەى ھاوتای $f(x) = 4 - x^2$ بدۆزۈۋە كە نىزىكتىرىن خالانەى $(0, 2)$.

شیکار



وینەى بەرامبەر ئەوە نیشاندەدات کە دوو خاڵ لەسەر پرگە
هاوتایە کە هەبێت کە مەترین دووریان لە خاڵی $(0, 2)$ هەبێت
دەستبکە بە دۆزینەوهی دووری نۆوان خاڵی $(0, 2)$ و خاڵی $(x, f(x))$

$$d = \sqrt{(x-0)^2 + (y-2)^2} = \sqrt{x^2 + (4-x^2-2)^2} = \sqrt{x^4 - 3x^2 + 4}$$

لەبەرئەوهی d کە مەترین بەها وەرەگرێت کاتی کە پرگەى ناو پرگە کە
کە مەترین بەهای هەبێت، بەها شلۆقەکانی نەخشە کە بدۆزەوه

$g(x) = x^4 - 3x^2 + 4$ داتاشاراوی نەخشەى g بدۆزەوه، پاشان هاوکیشەى $g'(x) = 0$ شیکاریکە.

$$g'(x) = 4x^3 - 6x = 2x(2x^2 - 3)$$

$$2x(2x^2 - 3) = 0$$

$$x = -\sqrt{\frac{3}{2}}, \quad x = \sqrt{\frac{3}{2}}, \quad x = 0$$

x	$-\infty$	$-\sqrt{\frac{3}{2}}$	0	$\sqrt{\frac{3}{2}}$	$+\infty$
$g'(x)$		-	+	-	+

خشتە کە ئەوە پروندە کاتەوه کە هەر دوو خاڵی شلۆقى $x = \sqrt{\frac{3}{2}}$ و $x = -\sqrt{\frac{3}{2}}$ هەریەکیان بەهای

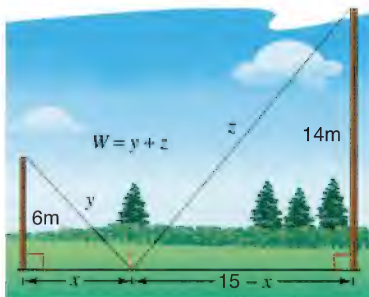
بچووکترین بۆ نەخشە کە دیاریدەکەن، بۆ دیاریکردنی ئەو خاڵانەى کە دەبنە شیکار بۆ
پرسیارە کە، دووری نۆوان خاڵی $(0, 2)$ و هەریە کە لە خاڵەکانی $(0, f(0))$ و $(-\sqrt{\frac{3}{2}}, f(-\sqrt{\frac{3}{2}}))$
و $(\sqrt{\frac{3}{2}}, f(\sqrt{\frac{3}{2}}))$ بدۆزەوه، دەبینیت کە هەردوو خاڵی $(-\sqrt{\frac{3}{2}}, f(-\sqrt{\frac{3}{2}}))$ و $(\sqrt{\frac{3}{2}}, f(\sqrt{\frac{3}{2}}))$ بریتیین
لە شیکارە کە، و دووری نۆوان هەریەکیان و خاڵی $(0, 2)$ یە کسانە بە 1.45 بەنزیکەى.

بدۆزەوه کە نزیکتەین

$$f(x) = x^2 - 2$$

2. ئەو خاڵانەى سەر پرگەى هاوتای

خاڵن لە $(0, -1)$ ؟



دۆزینەوهی کورتترین درێژی

3 نموونە

دوو ستوون بەرزیه‌کانیان 6 m و 14 m دووری
نۆوانیان 15 m، لە ئەندازیارێک داواکرا هەریە کە لە دوو
ستوونە کە بەهۆی تەلێک بێهەستیتەوه بە خاڵێک کە
دەکەوێتە نۆوانیانەوه هەروە کە لەم وینەیه دەردەکەوێت،
لە کام خاڵی نۆوان دوو ستوونە کە پێویستە دووسەری
تەلە کە بەیه‌کتر بێهەستیتەوه بۆ ئەوهی سەرجه‌می
دوو جایی درێژی هەردووکیان کە مەترین بێت؟

شیکار دريژي تهلهکه به W و دووری نیوان خالی بهستنهوه و ستونه کورتهکه به x دابنې،
 تهگر سهیری وینهکه بکهیت، دهبنیت که $W = y + z$ ، لهم پرسیاردا له جياتی تهوی يه که له
 گورپاوکان y يان z بهپي تهویتريان دهربريټ، لهوانه به گونجاو بيټ ههردوکیان بهپي x
 ههژماریکهين: $y^2 = x^2 + 6^2$ و $z^2 = (15 - x)^2 + 14^2$ و $y = \sqrt{x^2 + 36}$ و $z = \sqrt{x^2 - 30x + 421}$
 ههروهه $W = y + z = \sqrt{x^2 + 36} + \sqrt{x^2 - 30x + 421}$ لهم پرسیاردا ماوهی بهسوود بریتیه له
 $0 \leq x \leq 15$.

داتاشراوی $W(x)$ بدوزهوه:

$$W'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 36}} + \frac{x-15}{\sqrt{x^2 - 30x + 421}}$$

هاوکيشه $W'(x) = 0$ شيکاریکه.

$$W'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 36}} + \frac{x-15}{\sqrt{x^2 - 30x + 421}} = 0$$

$$x\sqrt{x^2 - 30x + 421} = (15 - x)\sqrt{x^2 + 36}$$

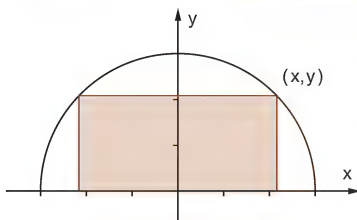
$$x^2(x^2 - 30x + 421) = (15 - x)^2(x^2 + 36)$$

$$x^4 - 30x^3 + 421x^2 = x^4 - 30x^3 + 261x^2 - 1080x + 8100$$

$$160x^2 + 1080x - 8100 = 0$$

$$x = -11.25 \quad x = 4.5$$

شيکاری پهسهند بریتیه له $x = 4.5$ پيوسته خالی بهستنهوه له دووری 4.5 m له ستونه
 کورتهکه جيگیر بکريټ.



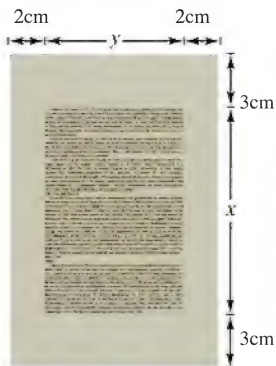
3. دريژي و پانی گهورترین لاکيشه بدوزهوه
 که دهتوانيت لهناو نیوه بازنهیهکدا بکيشيت
 نیوهتيرهکهی r بيټ.



دوژینهوهی کهمترین پروبه

4 نمونه

دیزاینهريکی چاپکردن کار لهسر ديزاینی لاپهريهکی لاکيشهیی دهکات، تهو پروبههري که
 تاييهتکراوه بو چاپکردنهکه بریتیه له 155 cm^2 و پانی پهراویزهکانی سهروه و خوارهوهی 3 cm
 و پهراویزهکانی لای راست ولای چهپی 2cm، پيوسته چهند له دريژي و پانی لاپهريهکه
 ههلبزيريت بو تهوهی بهکاربردن کاغزهکه کهمترین بيټ؟



شیکار

دريژي ناوچهی تاييهتکراوه به چاپکردنهکه به x وپانيهکهی به
 y و پروبههري لاپهريهکه به A هيماکه. $A = (x + 6)(y + 4)$ و x ،
 y به پهيوهندی $xy = 155$ بهیهکهوه دههستريټنهوه. تههمش
 ريټهدات به نووسینی A وه که نهخشهیه که بهپي x
 $A(x) = (x + 6)\left(\frac{155}{x} + 4\right) = 179 + 4x + \frac{930}{x}$
 لهم پرسیاردا ماوه بهسوودهکه بریتیه له کومهلهی ژماره
 راستیه موجهبهکان داتاشراوی نهخشهی $A(x)$ بریتیه له

$$A'(x) = 4 - \frac{930}{x^2}$$

و بەھايە شلۇقەكانى برىتيين لە پرەگەكانى ھاوكېشەى $A'(x) = 4 - \frac{930}{x^2} = 0$ ئەم ھاوكېشە دوو پرەگى ھەيە كە برىتيين لە 15.25 ± بەنزىكەيى پرەگە سالبەكە ھىچ مانايەكى نىيە. كەواتە درىژى لاپەرەكە و پانييەكەيى بەنزىكەيى برىتيين لە 21.25 و 14.16 cm $\left(\frac{155}{15.25} + 4\right) \approx$ يەك لەدواى يەك.

4. يەككە كار لەسەر دىزايىنى لاپەرەكەيى لاكېشەيى دەكات ئەو پروبەرەيى كە تايبەتكراوہ بۇ چاپكردنەكە برىتييە لە 200 cm² و پانى ھەريەكە لەجوار پەراويزەكەيى 3 cm دەبىت. پىويستە چەند لە درىژى و پانى لاپەرەكە ھەلبىژىرت بۇ ئەوہى بەكاربردنى كاغەزەكە كەمترىن بىت.



5-4

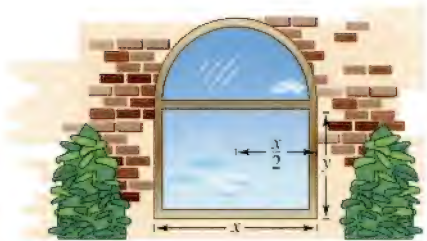
راھىتان

- 1 ئەو دوو ژمارەيە بدۆزەوہ كە سەرجهميان دەكاتە K كاتىك ئەنجامى لىكدانىان گەرەترىن بىت.
- 2 ئەو دوو ژمارەيە بدۆزەوہ كە ئەنجامى لىكدانىان دەكاتە 192 كاتىك سەرجهمى يەكەميان و 3 ئەوئەندەيى دووهميان كەمترىن ئەنجامى ھەبىت.
- 3 ئەو دوو ژمارەيە بدۆزەوہ كە سەرجهمى يەكەميان و دوو ئەوئەندەيى دووهميان بكاتە 100 وئەنجامى لىكدانىان گەرەترىن بىت.
- 4 لاكېشەيەك چىوہەكەيى 100 m درىژى و پانييەكەيى بدۆزەوہ بۇ ئەوہى پروبەرەكەيى گەرەترىن بىت. لە پرسىارى 5 و 6 دا خالىكى پروونكردنەوہى نەخشەكە بدۆزەوہ كەنزىكترىن خال بىت لەخالە دراوہكە.

$$(-1, 3) : f(x) = (x+1)^2 \quad 6$$

$$(4, 0) : f(x) = \sqrt{x} \quad 5$$

- 7 **ھاتوچۇ** نەخشەيى $F(v) = \frac{v}{22+0.02v^2}$ نموونەيەكە بۇ لىكۇلىنەوہى تىكرپاي جوولانەوہى ھاتوچۇ (ژمارەيى ئۆتۆمبىيەكان لە چركەيەكدا) لەسەر پىگايەكى قەلەبالغ، كاتىك v ھىمايە بۇ خىرايى پۇشتىن لەسەر ئەم پىگايە، كام خىرايى وادەكات ئەم تىكرپايە گەرەترىن بىت.
- 8 جووتيارىك پلان دادەنەت بۇ پەرژىنكردى پروبەرى زەويەكى لاكېشەيى لەسەر كەنارى پروبارىك، لەپىناو دابىنكردى كىلگەيەكى گزۇگيا كە رانەمەرىك تىيدا دەلەوہرەت، درىژى و پانى پىويستى زەويەكە دەبىت چەندبىت بۇ ئەوہى درىژى پەرژىنەكە كەمترىن بىت ئەگەر بزانىت پروبەرى ئەو زەويەيى پەرژىن كراوہ پىويستە بكاتە 180 000 m² و جووتيارەكە، ئەولايەيى زەويەكە كە دەكەوئتە سەر پروبارەكە پەرژىن ناكات؟



- 9 **گەرەترىن پروبەر** پەنجەرەيى نورماندى پىكدىت لە پەنجەرەيەكى شىوہ لاكېشەيى لە بەشى سەرەوہى پەنجەرەيەكى نيوہ بازنەيى ھەيە، ھەرەك لەوئەنە بەرامبەر دەردەكەوئت، دوورىيەكان گەرەترىن پەنجەرەيەكى نواماردى بدۆزەوہ كە چىوہى لاكېشەكەيى 6m بىت.

10 تيرى ئۇ بازنەيى كە دەۋرى سىڭۇشەيەكى دوو لايەكسانى

داۋە دەكاتە 8 cm گەرەتيرىن پووبەرى سىڭۇشەكە بدۆزەۋە.

11 ھەردوۋ نەخشە $f(x) = \frac{1}{2}x^2$ ۋ $g(x) = \frac{1}{16}x^4 - \frac{1}{2}x^2$ لەماۋى $[0, 4]$ بەكاربەيئە.

ا پوونكرندنەۋى ھەردوۋ نەخشەكە لەھەمان پووتەختى پۇوتاندا لەماۋى $[0, 4]$ بكيئشە.

ب بپك بەپپى x بنووسە كەدوۋرى ستوۋنى d لەنيۋان پوونكرندنەۋى دوونەخشەكە لە x دەربېرپت، جياكارى بەكاربەيئە بۇ ديارىكردى بەھاي x كەۋادەكات ئۇ دوۋرىە گەرەتيرىن بپت.

ج ھاۋكېشەي ليكەۋتەكانى ھەردوۋ پوونكرندنەۋەكە بدۆزەۋە كاتپك x دەكاتە ئۇ بەھايەكى كە لەلقى ب دۆزيتەۋە، ويئەنى دوو ليكەۋتەكە بكيئشە. چ پەيوەندييەك لە نيۋاناندا ھەيە؟

12 ەمبارىكى بچوۋك شۆۋى لوولەكى ۋەردەگرپت كە دوو بنكەكەي بەنيۋەگۇ كۆتايى دپت، قەبارەي گشتى ئۇ ەمبارە دەكاتە 12 m^3 نيۋەتيرەي لوولەكە كە بدۆزەۋە، كە كەمتيرىن پووبەرى پوۋى ەمبارەكە دابىندەكات.

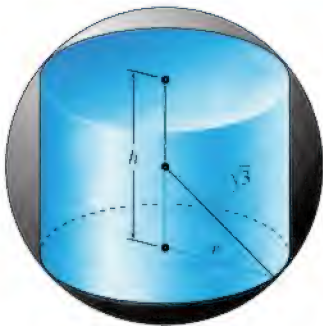
13 ەمبارىكى دەستكر دھاۋشۆۋى ەمبارەكەي پرسىيارى پيشوۋ قەبارەكەي 3 m^3 تپچوۋنى دوو نيۋەگۇيەكە دوو ئۇۋەندەي تپچوۋنى لوولەكەكە يە بەمەتر دوۋا. نيۋە تيرەي بنكەي لوولەكە بدۆزەۋە كەۋا دەكات كەمتيرىن تپچوۋنى ھەبپت.

14 قەبارەي گەرەتيرىن قوۋچەكى بازنەي ۋەستاۋ بدۆزەۋە دەتوانرپت لەناۋ گۇيەكە دابنرپت نيۋە تيرەكەي r بپت.

دەبارەي چەمكەكان

15 لايئشەيەك چپۋەكەي 20 m درپژى ۋپانييەكەي بدۆزەۋە بۇ ئۇۋى پووبەركەي گەرەتيرىن بپت ئايا بەھايەك بۇ درپژى ۋپانى لايئشەكە ھەيە، كەۋادەكات پووبەركەي كەمتيرىن بپت؟ ۋەلامەكەت پوونبكەۋە.

16 داۋاكرا لوولەكپك لەناۋ گۇيەك دابنرپت نيۋەتيرەكەي $\sqrt{3}$ يەكەي درپژى بپت ھەروەك لە ويئەنى بەرامبەر دەردەكەۋپت. بەرزى لوولەكەكەۋ نيۋەتيرەكەي بدۆزەۋە بۇ ئۇۋى قەبارەكەي گەرەتيرىن بپت.



پىداچونەۋەى بەش

1 پېناسەى خالى شلۇقى نەخشە بکە، چەماۋەى نەخشەىەك بکېشە كە جۇرە جىاۋازەكانى بەھا شلۇقەكان نىشانىدات.

2 نەخشەى تاك برىتییە لە نەخشەى f كە پاسادانى $f(-x) = -f(x)$ دەكات بەهای x ھەرچەندىت. وادابنى f نەخشەىەكى تاكى بەردەوامە وتواناى داتاشراۋى ھەيە، خشتەيى خوارەۋە چەند بەھايەكمان پىدەدات.

x	-5	-4	-1	0	2	3	6
y	1	3	2	0	-1	-4	0

ا $f(4)$ بدۆزەۋە.

ب $f(-3)$ بدۆزەۋە.

ج بە پوونكردنەۋەيى پىدراۋەكانى خشتەكە بنوینە و وینەى پوونكردنەۋەى نەخشەى f لەماۋەى $[-6, 6]$ بکېشە. كەمترین ژمارە بۇ بەھا شلۇقەكانى سەر نەخشەكە لەۋ ماۋەيەدا چەندە؟ ئەمە پوونبکەۋە.

د ئايا دەكرىت $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ ئامانجى نەبىت؟ ئەمە پوونبکەۋە.

لە دوو پرسىارى 3 و 4 دا (ئەگەر ھەبىت) خالە شلۇقەكان و ماۋەكانى پو و لەزىادىبون و ماۋەكانى پو و لەكەمبونى نەخشەكە بدۆزەۋە.

$$f(x) = (x-1)^2(x-3) \quad 3 \quad f(x) = \sin x + \cos x \quad 4 \quad \text{لەماۋەى } [0, 2\pi]$$

لە دوو پرسىارى 5 و 6 دا خالەكانى ۋەرگەرپان بدۆزەۋە، لە قۇپاۋ و قۇقزى پوونكردنەۋەى نەخشەكە بکۆلەۋە.

$$f(x) = x + \cos x \quad 5 \quad \text{لەماۋەى } [0, 2\pi] \quad f(x) = (x+2)^2(x-4) \quad 6$$

لە دوو پرسىارى 7 و 8 تاقىكردنەۋەى داتاشراۋەى دوۋەم بۇ دۆزىنەۋەى ھەموو بەھايەكانى كۆتايى بەكاربەئە.

$$f(x) = 2x^2(1-x^2) \quad 7 \quad f(x) = x - 4\sqrt{x+1} \quad 8$$

له پرسپاری 9 تا 16 ئامانجه داواکراوده که بدۆزهوه ئهگهر ههبیئت.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{3x^2+5} \quad 10$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2}{3x^2+5} \quad 9$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2+x}}{-2x} \quad 12$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2}{x+5} \quad 11$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x}{\sqrt{x^2+4}} \quad 14$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5\cos x}{x} \quad 13$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{2\sin x} \quad 16$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{6x}{x+\cos x} \quad 15$$

له پرسپاری 17 تا 20 ههموو دهركه ناره ئاسۆیههكان و ستوونیههكان بۆ نهخشهكه بدۆزهوه.

$$f(x) = \frac{5x^2}{x^2+2} \quad 18$$

$$f(x) = \frac{2x+3}{x-4} \quad 17$$

$$f(x) = \frac{3x}{\sqrt{x^2+2}} \quad 20$$

$$f(x) = \frac{3}{x} - 2 \quad 19$$

له پرسپاری 21 تا 28 روونکردنهوهی نهخشهكه بکێشه.

$$f(x) = x\sqrt{16-x^2} \quad 22$$

$$f(x) = 4x^3 - x^4 \quad 21$$

$$f(x) = \frac{x+1}{x-1} \quad 24$$

$$f(x) = (x-3)^2(x-1)^3 \quad 23$$

$$f(x) = \frac{x^2}{x^4+1} \quad 26$$

$$f(x) = \frac{2x}{1+x^2} \quad 25$$

$$f(x) = |x-1| + |x-3| \quad 28$$

$$f(x) = x^2 + x + \frac{4}{x} \quad 27$$

29 دوورییهكان پاپۆری A له لای رۆژهه لآت 100 km له پاپۆری B دووریو له وکاتهی، پاپۆری A

به ئاراسته ی رۆژئاوا به خیراییه ک تیکرایه که ی 12 km/h دهجولیت و پاپۆری B به خیرایی

10 km/h به رهو باشوور دهجولیت. له چ کاتی ک دووری نیوان دوو پاپۆره که که مترین دهبیئت؟

ئهو دووریه چهنده؟

30 له سیگۆشهیه کی گۆشه وهستاودا دوو لا وهستاوه که ی له سه ر تهوه ری پۆوتانه کان جووتن و

ژییه که ی به خالی (1, 8) داده پروات، سه رهکانی ئهو سیگۆشه یه بدۆزهوه بۆ ئه وه ی رووبه ره که ی

که مترین بیئت.

ئامادەکاری بۆ تاقىکردنەو

1 كام لەو نەخشەنەى خوارەو تەنھا دوو بەهەى كۆتايان هەيە؟

- ☐ $f(x) = |x-2|$ ☐ $f(x) = x^3 - 6x + 5$ ☐ $f(x) = x^3 + 6x - 5$
☐ $f(x) = \tan x$ ☐ $f(x) = x + \ln x$

2 لەكام ماو نەخشەى $f(x) = e^{x^3-6x^2+8}$ پرو لەكەمبوونە؟

- ☐ $]-\infty, -2]$ ☐ $[2, 4[$ ☐ $[2, 4]$ ☐ $[4, +\infty[$ ☐ نەيە.

3 ئەگەر $a < 0$ چەماو نەخشەى $f(x) = ax^3 + 3x^2 + 4x + 5$ قۆپاو دەبێت لەماو.

- ☐ $]-\infty, -\frac{1}{a}[$ ☐ $]-\infty, \frac{1}{a}[$ ☐ $]-\frac{1}{a}, +\infty[$ ☐ $[\frac{1}{a}, +\infty[$ ☐ $]-\infty, -1[$

4 پۆيەكانى x بۆ خالەكانى وەرگەرانى نەخشەى $f(x) = x^5 - 5x^4 + 3x + 7$.

- ☐ تەنھا 0 ☐ تەنھا 1 ☐ تەنھا 3 ☐ 0 و 3 ☐ 0 و 1

5 كام لەمانە پىگات پىدەدات، بىاربدەيت كەروونكردنەو نەخشەى f خالى وەرگەرانى هەبێت لە $x = c$.

- ☐ f' گەورەترين خۆجى هەيە لە $x = c$. ☐ $f''(c) = 0$ ☐ $f''(c)$ نەبێت.
☐ نيشانەى f'' لە $x = c$ دەرگۆرێت. ☐ f نەخشەيەكى سىجايە و $c = 0$

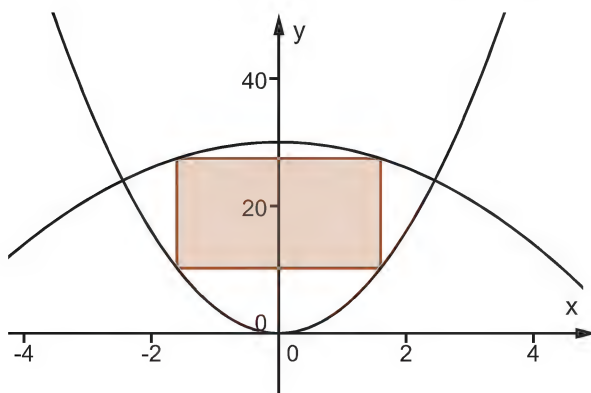
6 سەرچەمى دوو ژمارەى مووجەب دەكاتە 60. ئەو بەهەيە ئەنجامى لىكدانى يەكپىكان لە دووجاى ئەوى تريان دەكاتە گەورەترين بدۆزەو.

- ☐ 3481 ☐ 3600 ☐ 27 000 ☐ 32 000 ☐ 36 000

7 سىگۆشەيەكى گوشە وەستاو درىژى ژيەكەى دەكاتە 10 بەهەى گەورەترين پرويەر كامەيە.

- ☐ 24 ☐ 25 ☐ $25\sqrt{2}$ ☐ 48 ☐ 50

8 گەورەترين پرويەر بۆ ئەو لاكيشە سوورەى كە دەوردراو بە برگەهاوتاي $y = 4x^2$ و برگەهاوتاي $y = 30 - x^2$ برىتييە لە.



- ☐ $20\sqrt{2}$ ☐ 40
☐ $30\sqrt{2}$ ☐ 50
☐ $40\sqrt{2}$

9 قەبارەى خىشتەكېك بەتېكراى $24 \text{ cm}^3 / \text{min}$ زىاددەكات، لەكاتىكدا درىژى لايەكى بەتېكراى $2 \text{ cm} / \text{min}$ زىاددەكات درىژى لايەكى خىشتەكەكە كامەيە؟

- 2cm ☐ i $2\sqrt{2} \text{ cm}$ ☐ ب $\sqrt[3]{12} \text{ cm}$ ☐ ج 4cm ☐ د 8cm ☐ هـ

10 قەبارەى خىشتەكېك بەتېكراى $24 \text{ cm}^3 / \text{min}$ زىاددەكات، لەكاتىكدا پووبەرى پووبەكى بەتېكراى $12 \text{ cm}^2 / \text{min}$ زىاددەكات درىژى لايەكى خىشتەكەكە كامەيە؟

- 2cm ☐ i $2\sqrt{2} \text{ cm}$ ☐ ب $\sqrt[3]{12} \text{ cm}$ ☐ ج 4cm ☐ د 8cm ☐ هـ

11 خالىك لەسەر بازىنەيەك دەجوولت، كە چەقەكەى خالى بنەرەتە، ئەگەر خىرايىيە ئاسۆيىيەكەى لەخالى $(0.6, 0.8)$ بكاتە $\frac{dx}{dt} = 3$ ئەوا خىرايىيە ستوونىيەكەى $\frac{dy}{dt}$ لەو خالەدا كامەيە؟

- 3.875 ☐ i -3.75 ☐ ب -2.25 ☐ ج 3.75 ☐ د 3.875 ☐ هـ

بەشى پىنجەم

وانەكان

1-5 تەواوکاری بېسنوور

2-5 تەواوکاری سنووردار

تاقىکردنەوھى نىوھى بەش

3-5 ھەژمارکردنى تەواوکاری

4-5 جىبەجىکردنەكانى

تەواوکاری

پىداچوونەوھى

ئامادەكارى بۇ تاقىکردنەوھى

ھونەرى دروستکردنى سىرامىك لە زۆربەى

ولالتان پېشكەوتووه ھەتا ئىستاش ھەر

بەردەوامە، پروونکردنەوھى نەخشەى

تەنېشتەكانى دەفرىكى سىرامىك دەنۆيىت،

كاتىك x ھىمايە بۇ بەرزى بە «گرى» و y

ھىمايە بۇ نىوھتيرە لە بەرزى x . بىنكەى دەفرەكە

دروستكراوہ و لەسەر مېزە خولاوہكە دانرا. بېرى

ئەو قورہ شىلراوہى پىويستە بۇ بىنكەكەى

زىادبكرىت چەندە بۇ دروستکردنى ئەو دەفرە،

ئەگەر زانیت نىوھتيرەى ناوہوھى دەفرەكە

ھەردەم يەك «گرى» كەمتەرە لە نىوھتيرەى

دەرەوھى؟

ئايا تۆ ئامادەيت؟

✓ زاراۋەكان

1. ھەر دەستەۋازدەيەك لەستوونى لاي راست بە ۋاقىرەكراۋەكەي (لەيكدانەۋەكەي) لە ستوونى لاي چەپ بېستەۋە.

1. داتاشراۋى نەخشەي f كاتىك $x = a$. ئامانجى $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ كاتىك Δx لە سفر نزيك دەيىتەۋە.
2. تىكپاي گۆپانى ناۋەندى.
3. تىكپاي گۆپانى ساتى.
4. نەخشەي بەردەۋام.
5. ئامانج.
- ب. نزيكبوۋنەۋەي بىرپە بەگۆپاۋى x كاتىك x لە بەھايەكى ديارىكراۋ
- يان لە $+\infty$ نزيكەيىتەۋە.
- ج. نزيكبوۋنەۋەي بىرپە $\frac{f(a+h)-f(x)}{h}$ كاتىك h لە 0 نزيكەيىتەۋە.
- د. ئىنجامى دابەشكردى بىرپە گۆپانى y لەسەر بىرپە گۆپانى x .
- ھ. گەۋرەترين بەھا نەخشەكە لەماۋەكەدا ۋەرىدەگرىت.
- و. نەخشەيەكە دەتۋانرىت پرونكرىدەۋەكەي بكيشرىت بى ئەۋەي

پىنۋوسەكەت ھلېگىرىت.

✓ سەرجمە بەناۋبانگەكان

2. سەرجمەي $s_n = 1 + 2 + \dots + n$ بەيى n بدۆزەۋە، كاتىك n ژمارەيەكى تەۋاۋى مۇجەب بىت.
3. بە بەكارھىناني دەرئەنجامى بىركارى بىسەلمىنە $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ كاتىك n ژمارەيەكى تەۋاۋى مۇجەب بىت.

✓ داتاشراۋ

4. دوو نەخشەي جياۋاز $u(x), v(x)$ بدۆزەۋە كە پاسادانى $u'(x) = v'(x) = a$ دەكەن كاتىك a ژمارەيەكى پاستى بىت.
5. پوۋنىكەۋە دوو نەخشەي $f(x) = e^{2x}$ ۋ $g(x) = e^{2x} + C$ ھەمان داتاشراۋيان ھەيە، كاتىك C ژمارەيەكى پاستى بىت.
6. ئەگەر $f(x)$ داتاشراۋى $u(x)$ بىت، داتاشراۋى نەخشەي $v(x) = u(x) + C$ كاتىك C ژمارەيەكى پاستى بىت.

✓ رېسايەكانى داتاشراۋ

لە راھىناني 7 تا 12 داتاشراۋى ئەم نەخشەنە بدۆزەۋە.

- | | | |
|------------------------------------|-------------------------|---------------------------|
| 9. $f(x) = 2 \ln x - \frac{1}{x}$ | 8. $f(x) = 1 + \tan x$ | 7. $f(x) = e^x + \sin x$ |
| 12. $f(x) = \frac{\ln x}{x^2 + 1}$ | 11. $f(x) = e^{\sin x}$ | 10. $f(x) = e^x \ln(x+1)$ |

✓ ئامانجەكان

بە سادەترين شىۋە بدۆزەۋە.

- | | | |
|---------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------|
| 15. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \sin x}{x}$ | 14. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 + 3}{5x^2 + 7}$ | 13. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2+x} - \frac{1}{2}}{x}$ |
|---------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------|

تەواۋىكارى بېسىنور Indefinite Integral

1-5

دۆزىنەۋە

دۆزىنەۋە نەخشە بىنەپەتتە: نەخشە $F(x)$ كە ئەم داتاشراۋى لى پەيداۋوۋە دۆزەۋە.

$$F'(x) = x^2 \quad 3.$$

$$F'(x) = x \quad 2.$$

$$F'(x) = 2x \quad 1.$$

$$F'(x) = \cos x \quad 5.$$

$$F'(x) = \frac{1}{x^2} \quad 4.$$

چۆن ئەق نەخشەت دۆزىۋە؟

ئامانچەكان

- نووسىنى تەواۋىكارى بېسىنور بۇ دەرىجىنى نەخشە بىنەپەت بەكاردەھىت.
- نەخشە بىنەپەتتە كان بەكارهينانى رېسايەكانى تەواۋىكارى دەدۆزىتەۋە.
- نەخشە بىنەپەت بۇ نەخشەكى دىيارىكراۋ دەدۆزىتەۋە كە بەخالىكى دىيارىكراۋدا دەپوات.

نەخشە بىنەپەت (بەرامبەلى داتاشراۋ)

لە وانەكانى پېشوو فېربوۋىت چۆن داتاشراۋى نەخشەكى زانراۋ بدۆزىتەۋە. بەلام پۆزىك پىرسىوتە ئايا دەتوانىت نەخشەكە بدۆزىيەۋە كاتىك داتاشراۋەكى زانراۋىت؟ ۋەلامى ئەم پىرسىارە: بەلى. لەم وانەدا فېردەبىت ئەگەر f نەخشەكى بەردەۋام بىت دەتوانىت نەخشە F بدۆزىيەۋە كە تواناى داتاشراۋى ھەبىت، كاتىك f داتاشراۋەكى بىت، بە نەخشە F دەوترىت نەخشە بىنەپەتتى نەخشە f . لەمەدوا ھەندىك رېسا فېردەبىت، كە يارمەتت دەتات بۇ دۆزىنەۋە ھەموو نەخشە بىنەپەتتەكانى نەخشەكى دىيارىكراۋ.

زاراۋەكان Vocabulary

نەخشە بىنەپەت
Antiderivative
تەواۋىكارى بېسىنور
Indefinite Integral
نەگۆرپى تەواۋىكارى
Constant of integration

نەخشە بىنەپەت

بە نەخشە F كە تواناى داتاشراۋى ھەيە دەوترىت نەخشە بىنەپەتتى نەخشە f كاتىك داتاشراۋى F بىكەتە f .

ئايا نەخشەكى دىيارىكراۋ، زياتر لە نەخشەكى بىنەپەتتى ھەيە؟ ۋەلام بۇ ئەم پىرسىارە زۆرئاسانە. ھەموو نەخشە نەگۆرپەكان، نەخشە بىنەپەتتىن بۇ نەخشە $f(x)=0$.

نەخشە بىنەپەت

سەلمىتراۋى 1-5

ئەگەر $F(x)$ نەخشە بىنەپەتتى $f(x)$ بىت، ئەوا نەخشە $G(x) = F(x) + C$ كاتىك C ، ژمارەكى پاستى بىت، نەخشە بىنەپەتتە بۇ نەخشە $f(x)$.

تەنھا دۆزىنەۋە داتاشراۋى $G(x) = F(x) + C$ بەسە بۇ سەلماندنى ئەو سەلمىتراۋە، ئەوانەى لەبۋارى بىركارى كاردەكەن ھىماى $\int f(x)dx$ بەكاردەھىتن بۇ ھەر نەخشەكى بىنەپەتتى $f(x)$ ۋە بەو ھىما دەوترىت تەواۋىكارى بېسىنورى نەخشە $f(x)$.

نمونه 1

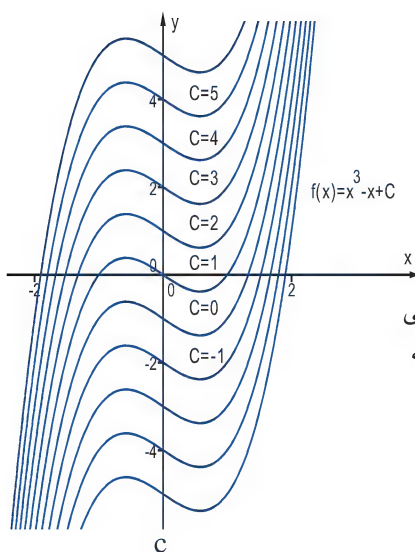
دۆزینه وهی نهخشه ی بنه پرت

$$\int x^2 dx \text{ بدۆزه وه.}$$

شیکار

ئه گهر پرسی داتاشراوی نهخشه توانیه کانی $f(x) = ax^n$ به بییری خۆت بهیئیه وه، بۆت دهرده که ویت نهخشه ی $f(x) = x^2$ داتاشراوی نهخشه یه که به شیوه ی $F(x) = ax^3$. به لام داتاشراوی ئه وهی دوا یی ده کاته $F(x) = 3ax^2$. ئه گهر $F'(x) = f(x)$ ئه و $a = \frac{1}{3}$ و $F(x) = \frac{1}{3}x^3$. نهخشه ی بنه پرتی نهخشه ی $f(x) = x^2$. ده توانیت به شیوه ی $\int x^2 dx = \frac{1}{3}x^3 + C$ بنووسیت تیبینی ژماره ی C بکه. ئامانج له بوونی ژماره ی نه گۆر تا بزانیته دوو نهخشه ی بنه پرت بۆ هه مان نهخشه جیاوازن له یه کتری به ژماره یه کی راستی.

$$1. \int x^3 dx \text{ بدۆزه وه.}$$



په یه ونه ی $G(x) = F(x) + C$ نۆوان دوو نهخشه ی بنه پرتی بۆ هه مان نهخشه، ئه وه ده گه یئیت پروونکردنه وهی هه موو نهخشه بنه پرتیه کانی نهخشه یه کی دیاریکراو له ئه نجامی پاکیشانی ئه ستوونی پروونکردنه وهی یه کیکیان په یه داده ییت وه که له وینه ی بهرام به ردا دهرده که ویت، به ره چا وکردنی ئه م تیبینیه هه موو نهخشه بنه پرتیه کانی نهخشه یه کی دیاریکراو یه که نهخشه ی بنه پرتیه یان هه یه پروونکردنه وه کی به خالیکی دیاریکراوی پرووته ختی پۆتانه کاند ده پوات. نه گۆری C خالی یه کتر برینی ستوونی نهخشه بنه پرتیه که ده نویی

نمونه 2

دۆزینه وهی نهخشه یه کی بنه پرتی دیاریکراو

نهخشه ی بنه پرتی بۆ نهخشه ی $f(x) = x^2$ بدۆزه وه که چه ماوه که ی به خالی (3,3) ده پوات.

شیکار

$G(x) = \frac{1}{3}x^3 + C$ نهخشه ی بنه پرتی $f(x) = x^2$. بۆ ئه وهی پروونکردنه وهی نهخشه بنه پرتیه که به خالی (3,3) بروات، ده بیته C پاسه دانی هاوکی شه ی $3 = \frac{1}{3}3^3 + C$ بکات واته ده بیته $C = -6$. له مه وه دهرده چیت نهخشه ی بنه پرتی بۆ نهخشه ی $f(x) = x^2$ که پروونکردنه وه کی به خالی (3,3) ده پوات بریتیه له $G(x) = \frac{1}{3}x^3 - 6$.

2. نهخشه ی بنه پرتی بۆ نهخشه ی $f(x) = x^4$ بدۆزه وه که پروونکردنه وه کی به خالی (2,4) ده پوات.



له م وانه یه دا فیرده بیته چۆن ته واکاری بیسنور بۆ نهخشه یه کی دیاریکراو بدۆزیه وه. له بهر ئه وهی داتاشراو بریتیه له گواسته نه وهی نهخشه یه که بۆ داتاشراوه که ی، ئه و دۆزینه وهی ته واکاری بیسنور بۆ نهخشه یه کی دیاریکراو بریتیه له کرداری پیچه وانه ی داتاشراو Antiderivative له و تیبینیه وه دهرده چیت له پرسیایه کانی داتاشراو، پرسیایه کانی ته واکاری بیسنور به ره هم ده یئرنین.

رېسايه کاني تهواوکاري بى سنوور

رېسايه کاني تهواوکاري	رېسايه کاني داتاشراو
$\int 0 dx = C$	$(C)' = 0$
$\int k dx = kx + C$	$(kx)' = k$
$\int kf(x) dx = k \int f(x) dx$	$(kf(x))' = kf'(x)$
$\int (f(x) \pm g(x)) dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx$	$(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$
$\int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + C \quad n \neq -1$	$(x^n)' = nx^{n-1}$
$\int e^x dx = e^x + C$	$(e^x)' = e^x$
$\int \frac{1}{x} dx = \ln x + C$	$(\ln x)' = \frac{1}{x}$
$\int \cos x dx = \sin x + C$	$(\sin x)' = \cos$
$\int \sin x dx = -\cos x + C$	$(\cos x)' = -\sin x$

جيبه جيکړدني رېسايه کاني تهواوکاري

نمونه 3

$\int (2\cos x - 5x) dx$ بدوږه وه.

شیکار

$$\int (2\cos x - 5x) dx = \int 2\cos x dx - \int 5x dx = 2\int \cos x dx - 5\int x dx = 2\sin x - \frac{5}{2}x^2 + C$$

3. $\int (2\sin x + 3x^2) dx$ بدوږه وه.



بۇ ئاسانکردني جيبه جيکړدني رېسايه کاني تهواوکاري، پښوښته له هه نډيک باردا نه خشه که دووباره بنووسرئته وه «رېکبخهيت»، به شيويه که به رېسايه کاني تهواوکاري بچن، بۇ نه وهى به ئاساني بتوانيت رېساکاني له سر جيبه جيکړهيت.

ههنگاه کاني دوزينه وهى تهواوکاري بى سنوور

نمونه 4

نهم خسته تهواوبکه.

تهواوکاري	رېکبخستني نه خشه که	تهواوکاري بکه	ساده بکه
$\int \frac{1}{x^3} dx$ [ا]			
$\int \sqrt{x} dx$ [ب]			
$\int 2\sin x dx$ [ج]			

شیکار

تہاواکاری	پیکھستنی نہخشہکہ	تہاواکاری بکہ	سادہبکہ
$\int \frac{1}{x^3} dx$ [ا]	$\int x^{-3} dx$	$\frac{-1}{2} x^{-2} + C$	$-\frac{1}{2x^2} + C$
$\int \sqrt{x} dx$ [ب]	$\int x^{\frac{1}{2}} dx$	$\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + C$	$\frac{2}{3} x\sqrt{x} + C$
$\int 2\sin x dx$ [ج]	$2\int \sin x dx$	$2(-\cos x) + C$	$-2\cos x + C$

خالئ چاودیڑی 4 : $\int x\sqrt{x} dx$ بدؤزہوہ.

راہینان

1-5

لہ راہینانی 1 تا کو 3، لہ راستی نہنجامہکان بکؤلہوہ. بہ ودرگرتنی داتاشراوی نہخشہ بنہرہتیہکہ.

$$\int \left(-\frac{9}{x^4} \right) dx = \frac{3}{x^3} + C \quad [1]$$

$$\int \left(4x^3 - \frac{1}{x^2} \right) dx = x^4 + \frac{1}{x} + C \quad [2]$$

$$\int \frac{x^2 - 1}{x\sqrt{x}} dx = \frac{2(x^2 + 3)}{3\sqrt{x}} + C \quad [3]$$

خشتہکہ تہاوبکہ.

تہاواکاری	پیکھستنی نہخشہکہ	تہاواکاری بکہ	سادہبکہ
$\int \sqrt[3]{x} dx$ [4]			
$\int \frac{1}{x\sqrt{x}} dx$ [5]			
$\int \frac{1}{(3x)^2} dx$ [6]			

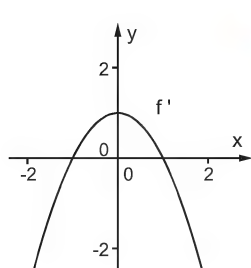
لہ راہینانی 7 تا 15، تہاواکاری بیسنور بدؤزہوہ، پاسہدانی راستی نہنجامہکات بہبہکارہینانی داتاشراوہکہی نہنجامبہدہ.

$$\int \left(\sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}} \right) dx \quad [9] \quad \int (x^3 - 4x + 2) dx \quad [8] \quad \int (2x - 3x^2) dx \quad [7]$$

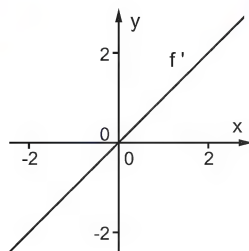
$$\int \left(\sqrt[4]{x^3} + 1 \right) dx \quad [12] \quad \int (2x^2 - 1)^2 dx \quad [11] \quad \int \frac{x^2 + x + 1}{\sqrt{x}} dx \quad [10]$$

$$\int (\tan^2 x + 1) dx \quad [15] \quad \int (x^2 - \sin x) dx \quad [14] \quad \int (2\sin x + 3\cos x) dx \quad [13]$$

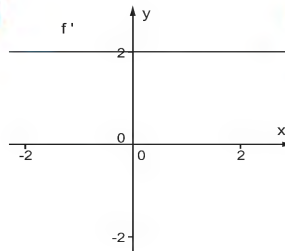
له پاهینانی 16 تا 18 دوو چهماوهی نژیک لهو نهخشانه بکیشنه که داتاشراوی هاوبهشیان ههیه که وینه پروونکردنهوهکه دهینوینت.



18



17



16

له دوو پاهینانی 19 و 20 نهخشه $f(x)$ بهزانی داتاشراوهکهی و خالیکی سهر پروونکردنهوهی بدۆزهوه.

20 $f'(x) = 2(x-1)$ (3,2)

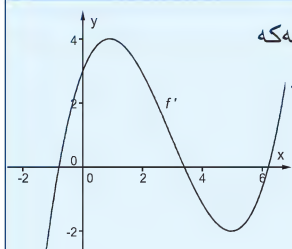
19 $f'(x) = 2x-1$ (1,1)

21 **گهشهکردنی پروهکهکان** نهمامگهیهک جوړیک له نهمامی کورت دهفرۆشیت دواى 6 سأل لهچاندنی. نهخشه $h'(t) = 1.5t + 5$ بهرپسایهک دادهنریت بو تیکرای گهشهى ئه و جوړه پروهکهانه که به سم له سالیکیدا پیورا بیت، له ماوهی شەش سألەکه، دریژی نهمامهکه 12 cm بوو کاتیکی چینرا $(t=0)$.

ا دریژی ئه و نهمامه بدۆزهوه $h(t)$ دواى t سأل.

ب دریژی نهمامهکه لهکاتی فروشتنی چهنده؟

دهربارهی چهمهکان



22 له وینهى بهرامبهه پروونکردنهوهی f' بو نهخشه f دهردهکهوینت وینهکه

بهکاربهینه بو وهلامدانهوهی ئه م پرسیارانه ئهگەر زانیت $f(0) = -4$.

ا بههایهکی نژیکراو بهلاری نهخشه f بده کاتیکی $x = 4$ بیت.

ب ئایا دهکریت $f(2) = -1$ وهلامهکهت پروونبکهوه.

ج ئایا دهکریت $f(5) - f(4) > 0$ وهلامهکهت پروونبکهوه.

د بههایهکی نژیکراو بده به x کاتیکی نهخشه f بههای گههرهترین کۆتایی وهردهگریت.

وهلامهکهت پروونبکهوه.

ه ئه و ماوهیه بهخهملینه که نهخشه f تیايدا قۆپاوه ههروهها تیايدا قۆقه. بههایهکی

نژیکراوهیهیهکی بده به x لهخالی وهرگهپان.

و بههایهکی نژیکراوه بده به x بو ئهوهی f'' ببیته بچووکتین کۆتایی.

ز وینهیهکی پروونکردنهوهی بهنژیکراوهی بو نهخشه f بکیشنه.

23 توپیک له بههرزی 2m بهخیرایی سهرهتایی 10m/s ههلا در، بهررترین خال توپهکه دهیگاتی چهنده؟

24 **تاودان** ئۆتۆمبیلایک له ترافیک لایت وهستابوو، کاتیکی گلوپی سهوز دهرکهوت، ئۆتۆمبیلکه به تاودانی $2m/s^2$ دهرچوو. له ههمان ساتدا ئۆتۆمبیلکه، ئۆتۆمبیلایک بارهه لگرای تیپه پوو که بهخیراییهکی نهگۆر برهکه 10m/s دهپوشت.

ا دواى چهنده مەتر ئۆتۆمبیلکه دهگاتهوه بارهه لگهکه؟

ب خیرایی ئۆتۆمبیلکه دهبیته چهنده کاتیکی دهگاته بارهه لگهکه.

25 فرۆكەيەك بەتاودانىكى نەگۆر لەسەر پارەوى فرۆكەخانە جولاًو بەرزبوووە دواى برىنى 1.5km لەسەر پارەووەكو خىرايىيەكەى گەيشتە 210 km/h. تاودانى فرۆكەكە چەندە؟

راست يان هەلە لە راھىنانى 26 تا 30 ديارىبىكە ئەگەر رستەكە راستە، يان هەلەيە ھۆيەكە لىكبدەو، بە دژە نموونەيەك بىسەلمىنە.

26 ھەموو نەخشەيەكەى بنەرەتى بۆ نەخشەيەكەى زۆر رادەدارى پلە n برىتييە لە نەخشەيەكەى زۆر رادەدارى پلە $n+1$.

27 ئەگەر f نەخشەيەكەى زۆر رادەدارىيەت، ئەوا نەخشەيەكەى بنەرەتى تاقانە ھەيە كە چەماوەكەى بەخالى بنەرەتدا دەروات.

28 ئەگەر $F(x)$ و $G(x)$ دوو نەخشەى بنەرەتى نەخشەى f بن، ئەوا $F(x) = G(x) + C$ كاتىك C ژمارەيەكەى راستىيە.

$$29 \int f(x)g(x)dx = \int f(x)dx \int g(x)dx$$

30 بۆ ھەر نەخشەيەكەى f تەنھا يەك نەخشەى بنەرەتى ھەيە.

31 نەخشەى f بدۆزەو كە داتاشاراوى دووھمى دەكاتە $f''(x) = 2x$ و چەماوەكەى لىكەوتى ئاسۆيى لە خالى $(2,0)$ ھەيەت.

32 $f'(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x < 2 \\ 3x & 2 \leq x \leq 5 \end{cases}$. نەخشەى f بدۆزەو ئەگەر بزانيەت بەردەوامە وە $f(2) = 6$ ئايا ئەم نەخشەيە تواناي داتاشاراوى لە $x = 2$ ھەيە ؟

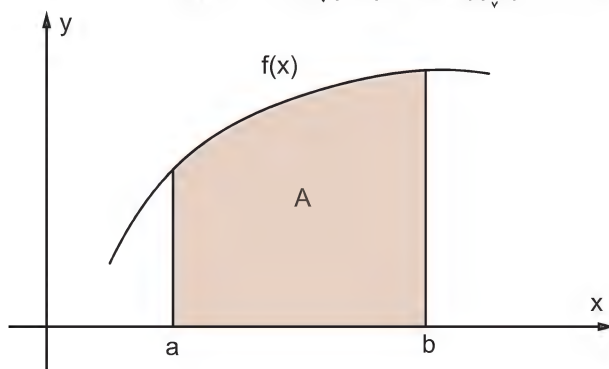
تەواوکاری سنووردار

Definite Integral

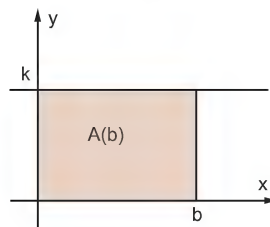
2-5

تەواوکاری سنووردار

لەوانەى پېشوو فېرېبويت كە دۆزىنەوەى نەخشەى بنەپەت بۆ نەخشەىەكى ديارىكراو كىردارىكە پېچەوانەى داتاشراو، تەواوکاری بېسنوور بۆ نەخشەى f دەبېتە نەخشەى بنەپەتى ئەو نەخشە. بەلام تەواوکاری بېسنوور پۆللىكى تىشى ھەيە لەوەى پېشوو كەمترىيە. لەم وانەيدا فېردەبیت چۆن نەخشەى بنەپەت بەكاردەھىنیت بۆ شىكارکردنى دووم جۆرى پرسىارى سەرەكى لە ھەژمارکردنى جىاكارى و تەواوکاری. لەم وانەيدا فېردەبیت چۆن نەخشەى بنەپەتى بەكاردەھىنیت بۆ دۆزىنەوەى پووبەرى سنووردارو بە پوونکردنەوەى نەخشەىەك و تەوەرى x لە لا يەك و دوو راستەھىلى $x = a$ و $x = b$ لەلايەكى ترمە. ھىماى A بۆ پووبەرى ئەو ناوچەىە بەكاربھىنە.

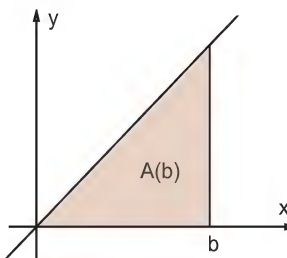


سەرەتا گرنگى بە پووبەرى $A(b)$ بۆ ناوچەى سنووردارو بە پوونکردنەوەى نەخشەكەو تەوەرى x لەلايەك و دوو راستەھىلى $x = 0$ و $x = b$ لەلايەكى ترمە دەدەين.

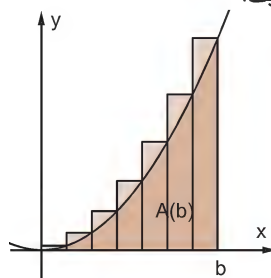


ھەولەدەين، شىوازىك بدۆزىنەوە بۆ ئەو پووبەرە. ئەگەر $f(x) = k$ ، كاتىك k ژمارەىەكى راستى بېت، ئەوا $A(b) = bk$. ئەگەر $f(x) = x$ ئەوا $A(b) = \frac{1}{2}b^2$.

ئەگەر $f(x) = x^2$ كارەكە ئالۆزتر دەبېت، چونكە ناوچەىەكى سنووردارو بە چەماوەى نەخشەكەو تەوەرى x ھەردوو راستەھىلى $x = 0$ و $x = b$ شىوہەكى ئەندازەى ناسراوى نىيە. ھەولەدەين ئەم پووبەرە بەشىوہى



نزيكراوىى بدۆزىنەوە. بۆ ئەمەش ماوہى $[0, b]$ بەشدەكەين بۆ n ماوہى يەكسان كەمەوداى ھەريەكەيان بكاكە $\left(\frac{b}{n}\right)$ و لەسەر ئەو ماوانە لاكېشەكان دروستدەكەين كە بەرزىيەكانيان يەك لە دواى يەك بكاكە $f\left(\frac{b}{n}\right), f\left(\frac{2b}{n}\right), \dots, f\left(\frac{nb}{n}\right)$ سەرجمى پووبەرەكانى ئەو لاكېشانە بەھاي نزيكەى پووبەر $A(b)$ پىكدەھىنیت.



ئامانجەكان

- تەواوکاری سنووردار بە بەكارھىنانى سىفەتەكانى ھەژماردەكات.

زاراوەكان Vocabulary

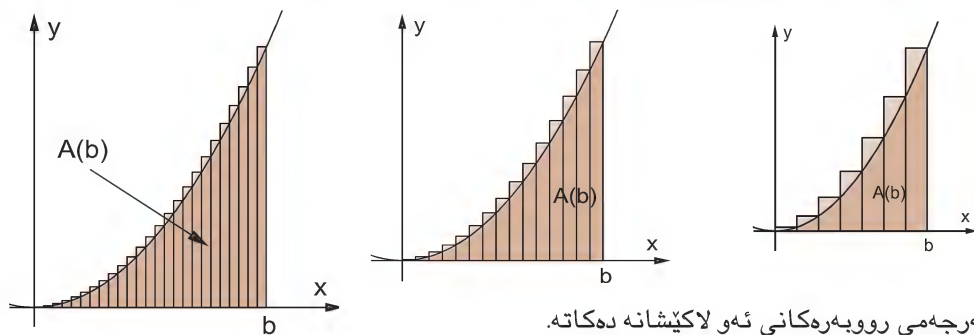
تەواوکاری سنووردار

Definite Integral

سنووردەكانى تەواوکاریەكە

Limits of integration

ئەگەر تەماشای ئەم سى ۱ پروونکردنەوھى خواروھ بکەیت، دەبینیت بە زیادبوونی بەھای n ژمارەى لاكيشەكان زياددهكات وسەرجهى پرووبەرەكان نزيك دەبێتەوھ لە $A(b)$. بەسوود وەرگرتن لەم تېيىنيە دەلێين $A(b)$ ئامانجى ئەو سەرجهمىە كاتێك بەھای n بېسنور زياد دەكات.



سەرجهى پرووبەرەكانى ئەو لاكيشانە دەكاتە.

$$S_n = \frac{b}{n} f\left(\frac{b}{n}\right) + \frac{b}{n} f\left(\frac{2b}{n}\right) + \dots + \frac{b}{n} f\left(\frac{nb}{n}\right) = \frac{b}{n} \left[\frac{b}{n}\right]^2 + \frac{b}{n} \left[2\frac{b}{n}\right]^2 + \dots + \frac{b}{n} \left[n\frac{b}{n}\right]^2$$

$$= \frac{b^3}{n^3} (1^2 + 2^2 + \dots + n^2)$$

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad \text{بەلام}$$

لەمەوھ دەردەچيێت:

$$A(b) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \frac{b^3}{n^3} = \frac{1}{3} b^3 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n+1)(2n+1)}{2n^3} = \frac{1}{3} b^3 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{2n^3} = \frac{1}{3} b^3$$

ئەوھى پيى گەشتين، لەو خستەيە پوخت كراوتەوھ.

A	$f(x)$
$A = kb$	$f(x) = k$
$A = \frac{1}{2} b^2$	$f(x) = x$
$A = \frac{1}{3} b^3$	$f(x) = x^2$

ئەم خستەى سەرەوھ ئەوھ دەردەخات كە پرووبەرى A ھەژماردەكريێت بە بەكارھيانی نەخشەى $F(x)$ كاتێك $A = F(b)$. لەلایەكى ترەوھ ئەم خستە چۆنيەتى دۆزينەوھى نەخشەى $F(x)$ دەردەخات.

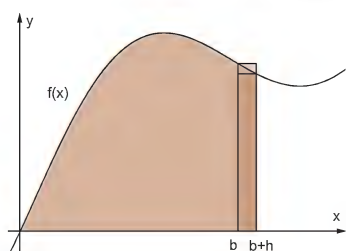
$F(x)$	A	$f(x)$
$F(x) = kx$	$A = kb$	$f(x) = k$
$F(x) = \frac{1}{2} x^2$	$A = \frac{1}{2} b^2$	$f(x) = x$
$F(x) = \frac{1}{3} x^3$	$A = \frac{1}{3} b^3$	$f(x) = x^2$

لەمەى پيىشەوھ دەردەچيێت كە پرووبەرى $A(b)$ دەكاتە $F(b)$ كاتێك $F(x)$ نەخشەى بنەپەتى نەخشەكەيە كاتێك $C = 0$. ئەگەر بارە گشتيیەكەمان باسكرد كاتێك f نەخشەيەكى بەردەوامە بەپيى ويىنەى بەرامبەر دەتوانين پرووبەرى $A(b+h) - A(b)$ سنووردار بكەين بە دوو پادە.

بريتيیە لە پرووبەرى لاكيشە بچووكەكە و پرووبەرى لاكيشە

گەورەكە. بەلام پرووبەرى لاكيشە بچووكەكە دەكاتە $hf(b+h)$

و پرووبەرى لاكيشە گەورەكە دەكاتە $hf(b)$.



لهمهوه دردهچیت $hf(b+h) \leq A(b+h) - A(b) \leq hf(b)$

لهوايدا $f(b+h) \leq \frac{A(b+h)-A(b)}{h} \leq f(b)$

كاتيك h له 0 نزيك دهبيتوه ئهمه مان بۆ دردهچیت.

$$\lim_{h \rightarrow 0} f(b+h) \leq \lim_{h \rightarrow 0} \frac{A(b+h)-A(b)}{h} \leq \lim_{h \rightarrow 0} f(b)$$

بهلام $\lim_{h \rightarrow 0} f(b+h) = f(b)$ چونكه f نهخشیهکی بهردوامه له $x = b$ و $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{A(b+h)-A(b)}{h} = A'(b)$

به پشتبستن به پیناسه داتاشراو $\lim_{h \rightarrow 0} f(b) = f(b)$.

به پشتبستن به سەلمینراوی دوو مهرج و لهوهی پیشوو بۆمان دردهچیت كه $A'(b) = f(b)$ كه $A(x)$ نهخشیه بنهپهتییه بۆ $f(x)$.

ئهگەر بکهپینهوه بۆ پروبهری ئه و ناوچهیهی سنووردراوه به چهماوهکه و تهوهری x له لایهک و

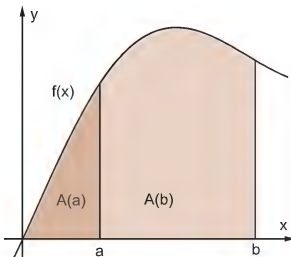
راستههیلای $x = a$ و $x = b$ له لایهکی ترهوه.

دردهچیت كه $A(b) - A(a)$ ، $A(y)$

نهخشیه بنهپهتییه بۆ $f(x)$ واته $S = A(b) - A(a)$

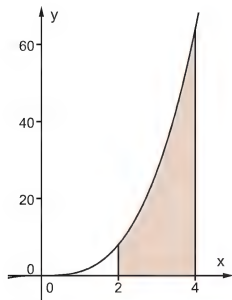
لهوهوه دردهکهوئت نهخشه بنهپهتییهکان بۆ

ههژمارکردنی پروبهرهکان بهسوودن.



نمونه 1

دۆزینهوهی پروبهری ناوچهیهک



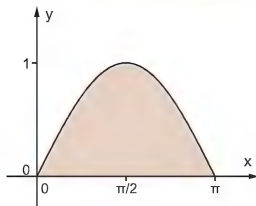
ئهگەر $f(x) = x^3$ پروبهری ئه و ناوچهیه بدۆزهوه كه سنووردراوه به چهماوهی f و تهوهری x و ههر دوو راستههیلای $x = 2$ و $x = 4$.

شیکار

بینیمان كه $A = F(b) - F(a)$ کاتیک F نهخشیه بنهپهتی f بیئت.

دهزانين كه $F(x) = \frac{1}{4}x^4$ نهخشیه بنهپهتی $f(x) = x^3$

لهوهوه دردهچیت $A = F(4) - F(2) = \frac{1}{4}4^4 - \frac{1}{4}2^4 = 60$



1. پروبهری ناوچهی سنووردراوه بنهخشیه

$f(x) = \sin x$ و تهوهری x و ههر دوو راستههیلای

$x = 0$ و $x = \pi$ بدۆزهوه.



پیناسهی تهواوکاری سنووردار

ئهگەر f نهخشیهکی بهردوام بیئت a و b دوو بههای بوارهکی بن. ئهوا تهواوکاری سنووردار بۆ

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

نهخشیه f له نیوان a دهکاته b کاتیک $F(x)$ نهخشیه بنهپهتی $f(x)$ بیئت. به a دهوتریت نزمترین رادهی تهواوکاری و b بهرزترین

رادهی تهواوکاری، و f نهخشیه بابتهتی تهواوکارییه.

ئهوانهی لهبوازی بیرکاریدا کاردهکهن هیماي $[F(x)]_a^b$ له جیاتی $F(b) - F(a)$ بهکاردههینن

تهواوکاری سنووردار چهند سیفتهیکی ههیه وادهکات ههژمارکردنی ئاسان بیئت.

سیفیه ته کانی ته واکاری سنووردار

- $\int_a^a f(x) dx = 0$
- $\int_b^a f(x) dx = -\int_a^b f(x) dx$
- $\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$
- $\int_a^b kf(x) dx = k \int_a^b f(x) dx$
- $\int_a^b (f(x) \pm g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx$
- ته گهر f نه خشه یه کی به رده وام بیټ و $f(x) \geq 0$ هر چنده بیټ له ماوه ی $[a, b]$ ، ته و
 $\int_a^b f(x) dx \geq 0$
- ته گهر f و g دوو نه خشه ی به رده وام بن و $f(x) \leq g(x)$ هر چنده بیټ له ماوه ی $[a, b]$ ، ته و
 $\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$
- ته گهر f نه خشه یه کی به رده وام بیټ ته و $F(x) = \int_a^x f(x) dx$ نه خشه یه که توانای داتا شراوی له
 دراوسی a دا هیه، داتا شراوه که ی $F'(x) = f(x)$ ، به نه خشه ی $F(x) = \int_a^x f(x) dx$ دهوتریټ
 نه خشه ی که له که بوو.

هه ژمارکردنی ته واکاری سنووردار

2 نمونه

به های ته واکاریانه
 هه ژماریکه.

$$\int_2^4 (x^2 - 3x - 2) dx \quad \text{[i]}$$

$$\int_{-1}^3 (-|x-1| + 2) dx \quad \text{[ب]}$$

شیکار

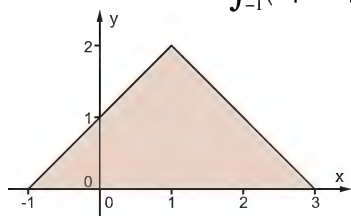
[i] به بشتبهستن به سیفیه ته کانی ته واکاری سنووردار.

$$\begin{aligned} \int_2^4 (x^2 - 3x - 2) dx &= \int_2^4 x^2 dx - \int_2^4 3x dx - \int_2^4 2 dx = \int_2^4 x^2 dx - 3 \int_2^4 x dx - 2 \int_2^4 dx \\ &= \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_2^4 - 3 \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_2^4 - 2 [x]_2^4 = \frac{1}{3} (4^3 - 2^3) - \frac{3}{2} (4^2 - 2^2) - 2(4 - 2) = -\frac{10}{3} \end{aligned}$$

[ب] له به رنه وده ی نه خشه که به های پووت له خو ده گریټ، ده بیټ خو مان پر گاریکه ی له هیما ی

به های پووت بو ته وده ی بتوانین نه خشه بنه رته ییه که بدو زینه وده ته ویش له ریگی
 نووسینه وده ی ته واکارییه که وهک سهرجه می دوو ته واکاری بهم شیوه ی خواره وده.

$$\begin{aligned} \int_{-1}^3 (-|x-1| + 2) dx &= \int_{-1}^1 (-|x-1| + 2) dx + \int_1^3 (-|x-1| + 2) dx \\ &= \int_{-1}^1 (x+1) dx + \int_1^3 (-x+3) dx \\ &= \int_{-1}^1 x dx + \int_{-1}^1 1 dx - \int_1^3 x dx + \int_1^3 3 dx \\ &= \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_{-1}^1 + [x]_{-1}^1 - \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_1^3 + [3x]_1^3 \\ &= 2 - 4 + 6 = 4 \end{aligned}$$



ده توانیت وهلامه کهت ساغیکه یته وده به هو ی هه ژمارکردنی پووبه ری سیگوشه که ی شیوه ی سهر وده

2. به های ته واکاریانه هه ژماریکه.

$$\int_{-1}^3 (1 - |x|) dx \quad \text{[ب]}$$

$$\int_{-2}^4 (x^2 - 2) dx \quad \text{[i]}$$



به‌های ناوهند Mean Value

به ژماره‌ی پاستی $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$ دهوتریت به‌های ناوهند بۆ نه‌خشه‌ی f له‌ماوه‌ی $[a, b]$.

له‌ئاماردا فیروبویت که ناوه‌پاسته‌ی کۆمه‌لێک به‌ها له‌وانه‌یه به‌هایه که نه‌بیّت له‌و به‌هایانه. ئەگەر ناوه‌ندی نمره‌کانی خویندکاره‌کانی پۆلیک له‌بابه‌تی بیرکاری 65.7، ئەمه ئه‌وه ناگه‌ینیت که خویندکاریک نمره‌ی 65.7 هینابیت. ئایا به‌های ناوه‌ندی نه‌خشه‌ی f له‌ماوه‌که‌دا به‌هایه که نه‌خشه‌که وه‌ریده‌گریت له‌خالیکدا ده‌که‌وێته ئه‌و ماوه‌یه؟ وه‌لامی ئه‌و پرسیاره به‌لێیه. به‌پشتبه‌ستن به‌ سه‌لمینراوی به‌های ناوه‌ند له‌ته‌واوکارییدا.

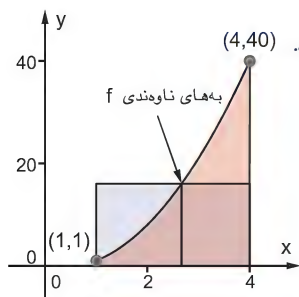
به‌های ناوه‌ند

سه‌لمینراوی 2-5

ئەگەر f نه‌خشه‌یه‌کی به‌رده‌وام بیّت له‌ماوه‌ی داخراوی $[a, b]$ ئه‌وا به‌هایه که هه‌یه وه‌ک $c \in [a, b]$ که پاسادانی $f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$ ده‌کات.

دۆزینه‌وه‌ی به‌های ناوه‌ند بۆ نه‌خشه

نمونه 3



به‌های ناوه‌ند بۆ نه‌خشه‌ی $f(x) = 3x^2 - 2x$ له‌ماوه‌ی $[1, 4]$ بدۆزه‌وه. $(4, 40)$

شیکار

به‌های ناوه‌ند بۆ نه‌خشه‌که له‌ماوه‌ی $[1, 4]$ بریتییه له

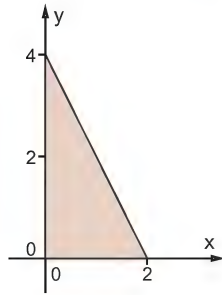
$$\begin{aligned} \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx &= \frac{1}{4-1} \int_1^4 (3x^2 - 2x) dx = \frac{1}{3} [x^3 - x^2]_1^4 \\ &= \frac{1}{3} [64 - 16 - (1 - 1)] = 16 \end{aligned}$$

3. به‌های ناوه‌ند بۆ نه‌خشه‌ی $f(x) = 2x + 1$ له‌ماوه‌ی $[1, 4]$ بدۆزه‌وه.

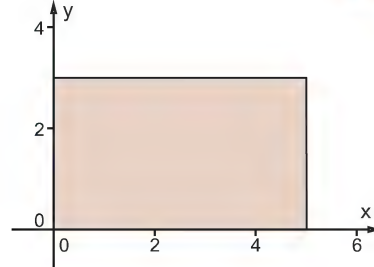


له راهیانانی 1 تا 6 ته واوکارییه کی سنووردار بو پوویه ری ناوچه سیبهرکراوه بنووسه بهی هه ژمارکردنی به های پوویه ده که.

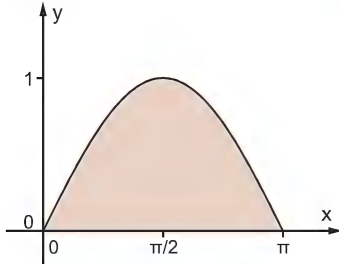
$$f(x) = 4 - 2x$$



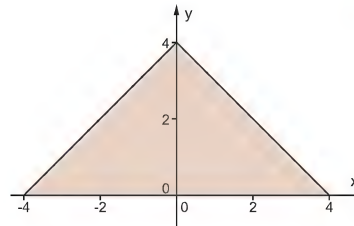
$$f(x) = 3$$



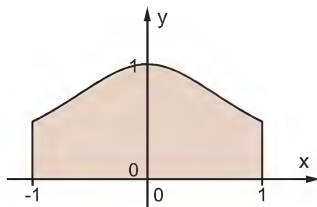
$$f(x) = \sin(x)$$



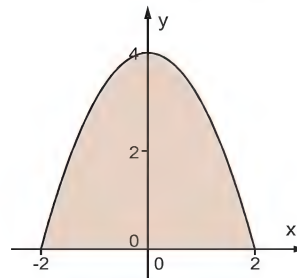
$$f(x) = -|x| + 4$$



$$f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$$



$$f(x) = 4 - x^2$$



له راهیانانی 7 تا 10 وینهی نهو ناوچهیه بکیشه که پوویه ده که ده کاته ته واوکارییه سنووردار ده که. پاشان یاساکانی هه ژمارکردنی پوویه له نه اندازه به کاریهینه بو دۆزیه وهی به های ته واوکارییه که.

$$\int_{-r}^r \sqrt{r^2 - x^2} dx$$

$$\int_{-1}^1 (1 - |x|) dx$$

$$\int_0^2 (2x + 5) dx$$

$$\int_0^4 \frac{x}{2} dx$$

له راهیانانی 11 تا 14 به های هه ته واوکارییه که به به کاریهیانی نه به هایانه بدۆزه وه.

$$\int_2^4 dx = 2$$

$$\int_2^4 x dx = 6$$

$$\int_2^4 x^3 dx = 60$$

$$\int_2^4 (6 + 2x - x^3) dx$$

$$\int_2^4 15 dx$$

$$\int_2^4 (x^3 + 4) dx$$

$$\int_2^4 4x dx$$

له راهینانی 15 تا 26 ئەم تەواوکاریانە هەژمار بکە.

$$\int_0^1 2x dx \quad 16$$

$$\int_2^7 3dx \quad 15$$

$$\int_1^3 (3x^2 + 5x - 4) dx \quad 18$$

$$\int_{-1}^0 (x^2 - 2) dx \quad 17$$

$$\int_{-3}^3 x^{\frac{1}{3}} dx \quad 20$$

$$\int_1^2 \left(\frac{3}{x^2} - 1 \right) dx \quad 19$$

$$\int_{-1}^0 \left(x^{\frac{1}{3}} - x^{\frac{2}{3}} \right) dx \quad 22$$

$$\int_1^4 \frac{x-2}{\sqrt{x}} dx \quad 21$$

$$\int_0^3 |2x - 3| dx \quad 23$$

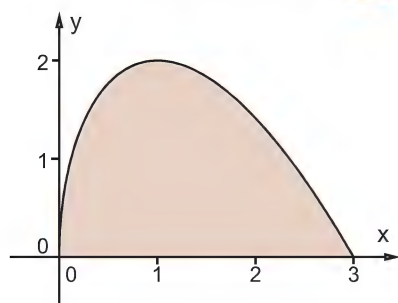
$$\int_1^4 (3 - |x - 3|) dx \quad 24$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1 - \sin^2 x}{\cos^2 x} dx \quad 26$$

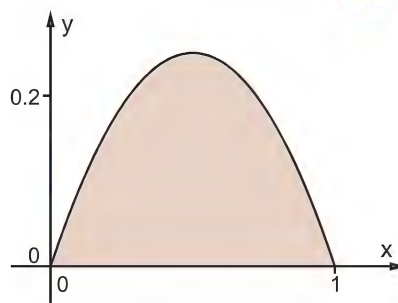
$$\int_0^{\pi} (1 + \sin x) dx \quad 25$$

له راهینانی 27 تا 30 پووبەری ناوچە سیبەڕکراوەکە بدۆزەوه.

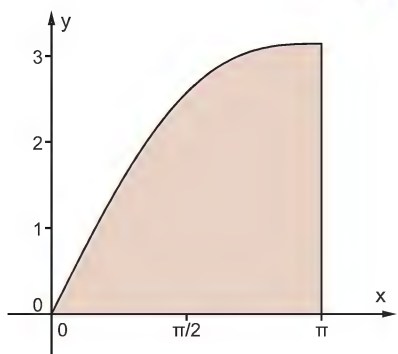
$$f(x) = (3-x)\sqrt{x} \quad 28$$



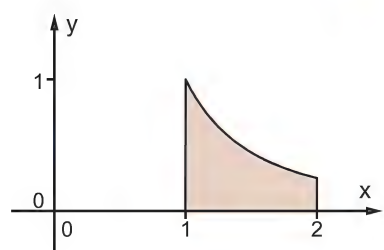
$$f(x) = x - x^2 \quad 27$$



$$f(x) = x + \sin x \quad 30$$



$$f(x) = \frac{1}{x^2} \quad 29$$

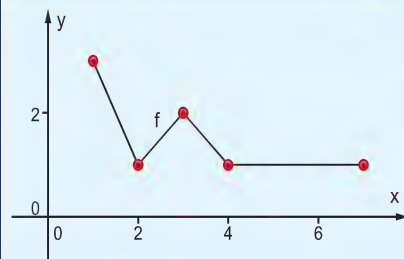


له دوو راهینانی 31 و 32 پووبەری ئەو ناوچە بدۆزەوه که سنووردراوه بە چەماوەی $f(x)$ و تەوهری x و دوو راستەهێڵی $x=a$ و $x=b$.

$$b=8 \quad a=0 \quad f(x) = 1 + \sqrt[3]{x} \quad 32$$

$$b=2 \quad a=0 \quad f(x) = 3x^2 + 1 \quad 31$$

دەربارەى چەمكەكان



33 وئىنەى بەرامبەر بەكاربەئىنە.

۱ $\int_1^7 f(x) dx$ بدۆزەۋە.

۲ بەھای ناۋەند بۆ نەخشەى f لەماۋەى $[1, 7]$ بدۆزەۋە.

۳ شىكارى دوو پرسیارى پېشوو دووبارە بکەۋە

دوای پاكىشانی نەخشەكە بە دوو يەكە بۆ سەرۋە.

34 g نەخشەيەكى پېناسەكراۋە ۋەك $g(x) = \int_0^x f(t) dt$ كاتىك f نەخشەيەكە

پوونكرندنەۋەكى لەوئىنەى بەرامبەردا دەرەكەۋىت.

۱ بەھايەكى نىزىكراۋە بدە بە $g(4)$, $g(2)$, $g(0)$

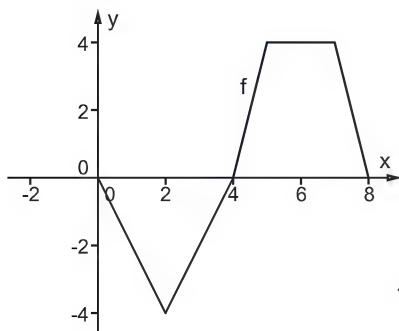
$g(8)$, $g(6)$

۲ فراوانترىن ماۋە بدۆزەۋە كە نەخشەكە تېيىدا پوۋ لە

زىادىۋونە ۋ تېيىدا پوۋ لەكەمبۋونە.

۳ بەھا بەرزەكان ۋ نىزمەكانى g بدۆزەۋە.

۴ وئىنەى پوونكرندنەۋەيى نىزىكراۋە بۆ چەماۋەى g بكىشە.



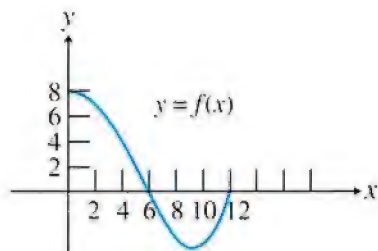
لە راھىتانی 35 ۋ 36 دا $F'(x)$ بدۆزەۋە.

36 $F(x) = \int_0^x t(t^2 + 1) dt$

35 $F(x) = \int_8^x \sqrt[3]{t} dt$

37 **هەلە لە كوئىيە؟** هەلە لەكوئىيە لە نووسىنى $\int_{-1}^1 x^{-2} dx = [-x^{-1}]_{-1}^1 = (-1) - 1 = -2$

38 $H(x) = \int_0^x f(t) dt$ كاتىك f نەخشەيەكى بەردەوامە بوارەكەى ماۋەى $[0, 12]$ ۋ چەماۋەكەى لە وئىنە بەرامبەردايە.



۱ $H(0)$ بدۆزەۋە.

۲ لە چ ماۋەيەكدا H نەخشەيەكى پوۋ لەزىادىۋونە؟ ۋەلامەكەت پوونبەكەۋە.

۳ لە چ ماۋەيەكدا پوونكرندنەۋەى H قۆزە؟ ئەمە پوونبەكەۋە.

۴ $H(12)$ مۆجەبە يان سالب؟ ئەمە پوونبەكەۋە.

۵ لە كوئىدا نەخشەى H بەرزترىن كۆتايى خۆجىيە؟ ئەمە پوونبەكەۋە.

۶ جۆرى ئەو بەرزترىن كۆتايى خۆجىيە ديارىبەكە. ۋەلامەكەت پوونبەكەۋە.

تاقکردنەوهی نیوهی بەش

1-5 تەواوکاری بیسنوور ✓

هەریەکە لەم تەواوکارییە بیسنوورانە بدۆزەوه.

$$\int \frac{(\sqrt{x}-1)^2}{\sqrt{x}} dx \quad \text{ج}$$

$$\int \frac{1+2\cos x}{3} dx \quad \text{ب}$$

$$\int \left(\frac{x^2}{2} - \frac{2}{x^2} \right) dx \quad \text{ا}$$

2-5 تەواوکاری سنووردار ✓

هەریەکە لەم تەواوکارییە سنووردارانە بدۆزەوه.

$$\int_0^{\frac{3\pi}{4}} (1 - |\cos x|) dx \quad \text{ب}$$

$$\int_{-1}^0 (2x-1)(x+1) dx \quad \text{ا}$$

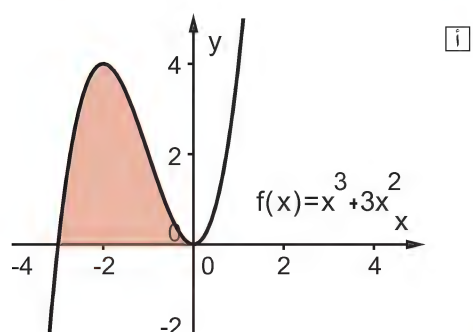
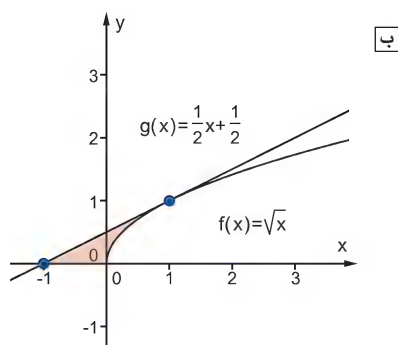
ئەگەر $\int_{-1}^2 f(x) dx = 3$ و $\int_{-1}^4 f(x) dx = 2$ ، ئەوا بەهای ئەمانە بدۆزەوه.

$$\int_2^4 f(x) dx \quad \text{ب}$$

$$\int_{-1}^2 (x - 2f(x)) dx \quad \text{ا}$$

2-5 هەژمارکردنی رۆوبەرەکان ✓

رۆوبەری ناوچە سییەراوەکان بدۆزەوه.



2-5 تاودان ✓

خێرای ئۆتۆمبێلێک 30 m/s بوو کاتێک شۆفێرەکە پێی لە برێک نا، دواى دوو چرکە ئۆتۆمبێلەکە راوەستا. ئەگەر وادانرا تاودانى ئۆتۆمبێلەکە نەگۆرە لە ماوهی برێک کردنەکەدا، ئەو تاودانە و ئەو دوورییەى بریویەتى بدۆزەوه لەو کاتەى برێکی گرتوه تا وەستاه.

ههژمارکردنی تهواوکاری

Integration Methods

ئامانجهکان

- تهواوکاری سنووردار
- ههژماردهکات به پړگای
- تهواوکاری به به شېبه شکردن.
- تهواوکاری سنووردار
- ههژماردهکات به پړگای
- له جیاتیدانانی گۆپراو.

زاراوهکان Vocabulary

- تهواوکاری به به شېبه شکردن
- Integration by parts
- تهواوکاری به به جیاتیدانانی
- گۆپراو
- Integration by Substitution

ههژمارکردنی تهواوکاری، سنوورداریت یان بېسنوور به کاریکي گران داده نریت به به راوردکردن به ههژمارکردنی داتاشراو. دۆزینه وهی نه خشه ی بنه پوت بۆ نه خشه یه کی دیاریکراو هه مووکات کاریکي ئاسان نییه، بۆ زالبوون به سهر ئه و ئاستهنگانه بیرکاری ناسان له م بواره دا گه یشتنه چهند پړگایه کی جیاوان. له گه ل به کاره یانانی پړسا بنه پرتیه کانی دۆزینه وهی تهواوکاری وهک له پێشه وه باسکرا دوو پړگای تریش هه ن ده توانریت له زۆر باردا په نایان بۆ بهین، ئه ویش پړگای تهواوکاری به به شېبه شکردن و پړگای تهواوکاری به به جیاتیدانانی گۆپراو.

تهواوکاری به به شېبه شکردن

زانای بیرکاری لایبنیز Leibniz ئه م پړگایه ی به کاره یان: ئه گه ر $u(x)$ نه خشه یه ک بێت به پێی x ئه و $du = u'(x)dx$ به جیاکاری $u(x)$ و dx به جیاکاری x ناونا. ئه و پړگای به کارده یانین، چونکه وادهکات دوو باب به ته که ی ئه م وانه یه ئاسان بن. پړگای تهواوکاری به به شېبه شکردن له پړسای داتاشراوی ئه نجامی لیکدانی دوو نه خشه دهرده چیت. وهک ده زانین $(uv)' = uv' + vu'$. له مه وه دهرده چیت

$$d(uv) = (uv)' dx = (uv' + vu') dx = uv' dx + vu' dx = u dv + v du$$

له مه وه ش

$$u(x)v(x) = \int [u(x)v'(x)] dx = \int (u(x)v'(x) + v(x)u'(x)) dx$$

$$= \int u(x)v'(x) dx + \int v(x)u'(x) dx$$

ئهمه ی پێشو به م شێوه یه دهنووسریت

$$\int u(x)v'(x) dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x) dx$$

$$\int u dv = uv - \int v du \quad \text{یان}$$

سهرکه وتنی به کاره یانانی ئه م پړگایه ده که ویت به سهر باش دیاریکردنی u و dv هه رده م هه ولیده u و هه لېزیریت که داتاشراوه که ی له خو ی ئاسانتر بیت.

تهواوکاری به به شېبه شکردن

1 نمونه

$$\int x e^x dx \quad \text{بدۆزه وه.}$$

شیکار

وهک دیاره داتاشراوی $f(x) = x$ ئاسانتره له نه خشه که خو ی. که واته $u = x$ و $dv = e^x dx$ هه لېزیره.

$$\text{ئینجا } du = u'(x)dx = dx, \quad u'(x) = 1 \quad \text{دهرده چیت}$$

$$v(x) = \int v'(x) dx = \int e^x dx = e^x$$

ئیسنا پړسای تهواوکاری به به شېبه شکردن به کاره یان.

$$\int u dv = uv - \int v du$$

$$\int x e^x dx = x e^x - \int (1) e^x dx = x e^x - \int e^x dx = x e^x - e^x + C = e^x (x - 1) + C$$

$$1. \int x^2 \ln x dx \quad \text{بدۆزه وه.}$$



نمونه 2

تەواوکاری نەخشەیی یەك رادەیی

$$\int_1^e \ln x dx \text{ بدۆزەوه.}$$

شیکار

سەرەتا تەواوکاری بێسنوور $\int \ln x dx$ بدۆزەوه. دیارە کە داتاشراوی $f(x) = \ln x$ لە نەخشەکە خۆی

ئاسانتەر، کەواتە $u = \ln x$ و $dv = dx$ هەلبژێرە ئینجا $du = u'(x)dx = \frac{1}{x} dx$ و $v = \int dx = x$

رێسای تەواوکاری بە بەشەبەشکردن بەکاربهێنە.

$$\int u dv = uv - \int v du$$

$$\int \ln x dx = x \ln x - \int \left(\frac{1}{x}\right)(x) dx = x \ln x - \int dx = x \ln x - x + C = x(\ln x - 1) + C$$

ئێستا تەواوکارییە سنووردارەکە هەژمار بکە.

$$\int_1^e \ln x dx = [x(\ln x - 1)]_1^e = (e)(\ln(e) - 1) - (1)(\ln(1) - 1) = e(1 - 1) - (0 - 1) = 1$$

$$2. \int_1^3 \ln 3x dx \text{ بدۆزەوه.}$$



تەواوکاری بە لەجیاتیدانانی گۆراو

بۆ بەکارهێنانی رێسای تەواوکاری بە لەجیاتیدانانی گۆراو سوود لە داتاشراوی نەخشەیی

ئاوێتە وەردەگرین بە بەکارهێنانی رێگای لایبېنز Leibniz ئەگەر $u = g(x)$ ئەوا $du = g'(x)dx$

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(u)du = F(u) + C = F(g(x)) + C \text{ ئەوکاتە،}$$

تەواوکاری بە لەجیاتیدانانی گۆراو

3

نمونه 3

$$\int 2x(x^2 + 1)^2 dx \text{ بدۆزەوه.}$$

شیکار

وا دابنێ $u = x^2 + 1$ لەوهوه دەردەچێت $du = 2x dx$ بەمەش

$$\int 2x(x^2 + 1)^2 dx = \int u^2 du = \frac{1}{3}(u)^3 + C = \frac{1}{3}(x^2 + 1)^3 + C$$

$$3. \int 2x\sqrt{x^2 - 1} dx \text{ بدۆزەوه.}$$



هەژمارکردنی تەواوکاری سنووردار بە لەجیاتیدانانی گۆراو

4

نمونه 4

$$\int_0^1 x(x^2 + 1)^3 dx \text{ بدۆزەوه.}$$

شیکار

تەواوکاری بێسنووری $\int x(x^2 + 1)^3 dx$ بدۆزەوه ئه‌ویش بە لەجیاتیدانانی $u = x^2 + 1$ کەواتە

$du = 2x dx$ یان $xdx = \frac{1}{2} du$ لەوهوه دەردەچێت.

$$\int x(x^2 + 1)^3 dx = \int \frac{1}{2} u^3 du = \frac{1}{2} \int u^3 du = \frac{1}{2} \left[\frac{u^4}{4} \right] = \frac{1}{2} \left[\frac{(x^2 + 1)^4}{4} \right]$$

ئێستا تەواوکارییە سنووردارە کە هەژمار بکە.

$$\int_0^1 x(x^2 + 1)^3 dx = \frac{1}{2} \left[\frac{(x^2 + 1)^4}{4} \right]_0^1 = \frac{1}{2} \left(4 - \frac{1}{4} \right) = \frac{15}{8}$$

$$4. \int_1^2 x\sqrt{x^2 + 1} dx \text{ بدۆزەوه.}$$



له راهنمایی 1 تا 4 نه خسته که به تهاوکاری گونجاو لهو تهوکاریه بیسنوورانه بهستهوه.

$$\int x^2 \cos x dx \quad \text{د} \quad \int x^2 e^x dx \quad \text{ع} \quad \int x \sin x dx \quad \text{ب} \quad \int \ln x dx \quad \text{ا}$$

$$f(x) = x^2 \sin x - 2x \cos x - 2 \sin x \quad \text{2} \quad f(x) = \sin x - x \cos x \quad \text{1}$$

$$f(x) = -x + x \ln x \quad \text{4} \quad f(x) = x^2 e^x - 2x e^x - 2 e^x \quad \text{3}$$

له راهنمایی 5 تا 8 و dv و u دیاریکه بو دستپکردنی تهوکاری به بهشبهشکردن (تهوکاریه که داواکراو نییه).

$$\int x^2 \cos x dx \quad \text{8} \quad \int \frac{x}{\cos^2 x} dx \quad \text{7} \quad \int (\ln x)^2 dx \quad \text{6} \quad \int x e^{2x} dx \quad \text{5}$$

له راهنمایی 9 تا 10 $g(x)$ جیاکهوه له $\int f(g(x))g'(x)dx$

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} dx \quad \text{10} \quad \int 10x(5x^2+1)^2 dx \quad \text{9}$$

له راهنمایی 11 تا 14 تهوکاری بیسنوور بدۆزهوه به گونجاوترین ریگا.

$$\int x^3 \sin x dx \quad \text{14} \quad \int x \cos x dx \quad \text{13} \quad \int x \sqrt{x-1} dx \quad \text{12} \quad \int (x^2-1)e^x dx \quad \text{11}$$

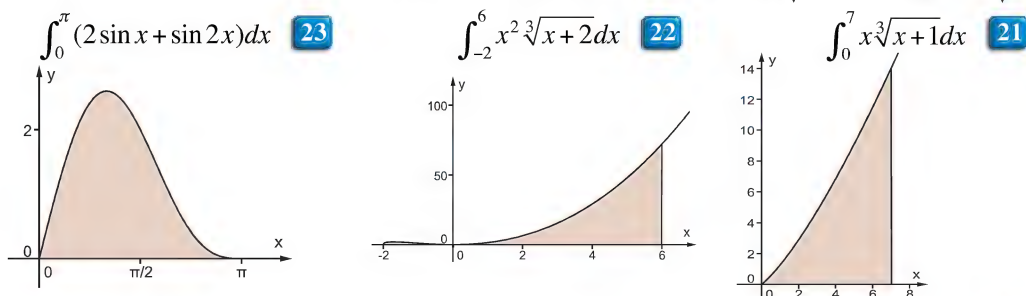
له راهنمایی 15 تا 17 نه خسته بی نه پرتی بو f که به خالیکی دیاریکراودا ده پوات.

$$(2,7), f(x) = -2x\sqrt{8-x^2} \quad \text{17} \quad (2,10), f(x) = 2x(4x^2-10)^2 \quad \text{16} \quad (0,3), f(x) = x \cos \frac{x}{2} \quad \text{15}$$

نهم تهوکاریه سنوورداره هه ژماریکه 18 تا 20.

$$\int_0^\pi x \sin 2x dx \quad \text{20} \quad \int_0^1 x^2 e^x dx \quad \text{19} \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x dx \quad \text{18}$$

له راهنمایی 21 تا 23 پرویهی ناوچه سیبه رکراوده که بدۆزهوه.



نهمه $\int_0^2 x^2 dx = \frac{8}{3}$ به کار بهینه بو دستکوتنی بهای ئهو تهوکاریه سنووردارانه بهی ئهوهی تهوکاری نهجامیدهیت.

$$\int_{-2}^0 3x^2 dx \quad \text{د} \quad \int_0^2 -x^2 dx \quad \text{ع} \quad \int_{-2}^2 x^2 dx \quad \text{ب} \quad \int_{-2}^0 x^2 dx \quad \text{ا}$$

دهربارهی چه مکهکان

$$\int x(5-x^2)^3 dx = \int u^3 du \quad \text{پرونیکهوه بوچی} \quad u = 5 - x^2 \quad \text{کاتیك} \quad \text{25}$$

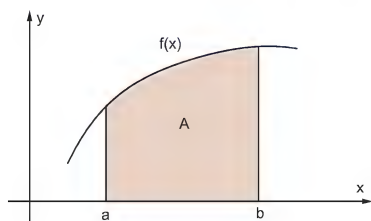
$$\int_{-2}^2 x(x^2+1)^2 dx = 0 \quad \text{پرونیکهوه بوچی} \quad \text{بهی ئهوهی تهوکاری نهجامیدهیت.} \quad \text{26}$$

$$\int \frac{x^3}{\sqrt{4+x^2}} dx \quad \text{27} \quad \text{بدۆزهوه به به کارهینانی:}$$

تهوکاری به بهشبهشکردن کاتیك $dv = \frac{x}{\sqrt{4+x^2}} dx$ بیئت. $u = 4 + x^2$ کاتیك $u = 4 + x^2$ بیئت.

جیبه جیکردنه کانی ته واکاری

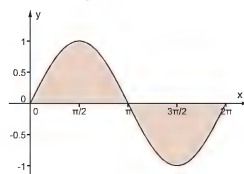
Applications of Integral



هه ژمارکردنی پوویه

له وانه کانی پیشوو فیروبویت که ته واکاری سنووردار یارمه تیدهدات بو هه ژمارکردنی پوویه ری ته واکاچی

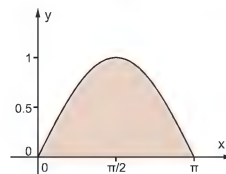
سنووردراوه به پوونکردنه ووی نه خشه و ته وری x له لایه که و هه ردوو راسته هیلی $x=a$ و $x=b$ کاتی که $a < b$ له لایه کی تر. نه خشه که موجه به له ماوهی $[a, b]$ واته $f(x) > 0$ بو هه ربه هایه کی x له و ماوه ده. بو ته وری گرنگی ته مه تیگهیت هه ژماری $\int_0^\pi \sin x dx$ و $\int_0^{2\pi} \sin x dx$ بکه.



$$\int_0^\pi \sin x dx = -[\cos x]_0^\pi = -\cos \pi - (-\cos 0) = 2$$

$$\int_0^{2\pi} \sin x dx = [\cos x]_0^{2\pi} = \cos 2\pi - (-\cos 0) = 0$$

له نه نجامه کانی پیشوو بو ت دهرده که ویت که $\int_0^{2\pi} \sin x dx = 0$ واته به های $\int_\pi^{2\pi} \sin x dx$ ژماره یه کی سالبه ته مهش و امان لیده کات جیا وازی بکهین له نیوان ته و باره ی نه خشه که تییدا سالب نییه له ماوهی $[a, b]$ کاتی که $a < b$ و ته و باره ی نه خشه که تییدا موجه نییه له هه مان ماوه ده.



هه ژمارکردنی پوویه

ته گهر a, b دوو ژماره راستی بن، به مه رجیک $a < b$ ته و پوویه ری ته واکاچی یه کی به پوونکردنه ووی نه خشه ی $f(x)$ و ته وری x و دوو راسته هیلی $x=a$ ، $x=b$ سنووردراوو ده کاته $\int_a^b f(x) dx$.

بو هه ژمارکردنی ناوچه یه کی سنووردراو به پوونکردنه ووی نه خشه ی f ته وری x و دوو راسته هیلی $x=a$ و $x=b$ ، پیویسته سه رته ماوه ی $[a, b]$ به شبکه ییت، به شیوه یه که نه خشه که هیما یه کی بیاریزیت له هه موو به شه کان، پاشان پوویه ری هه موو به شه کان هه ژماریکه له کوتایدا پوویه ره کان کوپکه وه. به گه رانه وه بو پوویه ری سنووردراو به نه خشه ی $f(x) = \sin x$ و ته وری x دوو راسته هیلی $x=0$ و $x=2\pi$ ته و ته و پوویه ره ده کاته $4 = 2 - (-2) = \int_0^\pi \sin x dx - \int_\pi^{2\pi} \sin x dx$.

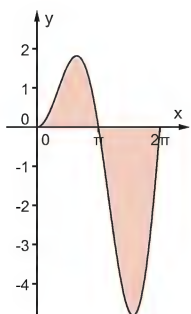
هه ژمارکردنی پوویه

1 نمونه

پوویه ری ناوچه ی سنووردراو به پوونکردنه ووی نه خشه ی $f(x) = x \sin x$ و ته وری x له لایه که و دوو راسته هیلی $x=0$ و $x=2\pi$ له لایه کی تر بدوژوه.

شیکار

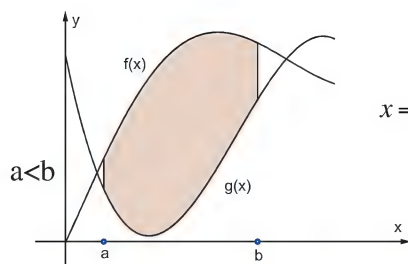
سه رته نه خشه ی بنه رته ی بو نه خشه ی f بدوژوه. پیشت زانیت $F(x) = \sin x - x \cos x$ نه خشه ی بنه رته ییه بو نه خشه ی $f(x) = x \sin x$. ئینجا ویننه ی پوونکردنه ووی نه خشه که بکیش بو دیاریکردنی چو نیه تی به شبوونی ماوه که $[0, 2\pi]$.



نەخشەكە سالب لایەتتە $[0, \pi]$ و مۆجەب لایەتتە $[\pi, 2\pi]$.
لەمەوێ دەردەچێت كە پووبەری ناوچەى سیبەرکراوى A دەكاتە.

$$\begin{aligned} A &= \int_0^{\pi} x \sin x dx - \int_{\pi}^{2\pi} x \sin x dx = [\sin x - x \cos x]_0^{\pi} - [\sin x - x \cos x]_{\pi}^{2\pi} \\ &= [\sin(\pi) - (\pi) \cos(\pi)] - [\sin(0) - (0) \cos(0)] \\ &\quad - [\sin(2\pi) - (2\pi) \cos(2\pi)] - [\sin(\pi) - (\pi) \cos(\pi)] \\ &= [\pi - 0] - [-2\pi + (-\pi)] = 4\pi \end{aligned}$$

1. پووبەری ئەو ناوچەى بەدۆزەوێ سنووردراو بە پوونکردنەوێ $f(x) = \cos x$ و تەوێ x لەلایەك و دوو راستەهێڵی $x = -\pi$ و $x = \pi$.



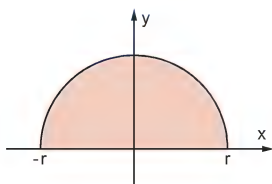
پووبەری نیوان چەماوێ دوو نەخشە

بۆ هەژمارکردنی پووبەری سنووردراو بە پوونکردنەوێ
هەردوو نەخشەى $f(x)$ و $g(x)$ و دوو راستەهێڵی $x = a$ و $x = b$
كاتێك $a < b$ ئەمەى خوارەو بەكاربهێنە.

هەژمارکردنی پووبەری نیوان چەماوێ دوو نەخشە

ئەگەر f, g دوو نەخشەى بەردەوام بن و پاسادانی $f(x) \geq g(x)$ لەماوێ $[a, b]$, ئەوا پووبەری
سنووردراو بە پوونکردنەوێ هەردوو نەخشەى $f(x)$ و $g(x)$ و هەردوو راستەهێڵی $x = a$ و $x = b$
كاتێك $a < b$ دەكاتە.

$$A = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$$



پووبەری بازە

تەواوکاری بەكاربهێنە بۆ هەژمارکردنی پووبەری بازەى
نیووتیرەكەى r بێت.

شیكار

ئەنجامەكە ناگۆرێت ئەگەر چەقى بازەكە لە خالی بنەپەت دابنێت، ئەوكات هاوكێشەى بازەكە
دەبێتە $x^2 + y^2 = r^2$. پووبەری نیووتیرەكەى دەكەوێتە سەرەوێ تەوێ x بەسە بیدۆزییەو.
ئەو پووبەرە A بریتییه لە پووبەری نیوان پوونکردنەوێ $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$ و $g(x) = 0$ لەلایەك و
دوو راستەهێڵی $x = -r$ و $x = r$ لەلایەكى تر.

$$A = \int_{-r}^r \sqrt{r^2 - x^2} dx$$

بۆ دۆزینەوێ ئەم تەواوکارییه گۆراوەكە دەگۆرین $x = r \cos t$ كەواتە $dx = -r \sin t dt$
لەدواىیدا:

$$A = \int_{\pi}^0 \sqrt{r^2 - r^2 \cos^2 t} (-r \sin t) dt = \int_{\pi}^0 -r^2 \sqrt{1 - \cos^2 t} \sin t dt = r^2 \int_0^{\pi} \sin^2 t dt$$

$$= r^2 \int_0^{\pi} \left(\frac{1 - \cos 2t}{2} \right) dt = \frac{r^2}{2} \left[t - \frac{\sin 2t}{2} \right]_0^{\pi} = \frac{r^2}{2} [\pi - 0] = \frac{\pi r^2}{2}$$

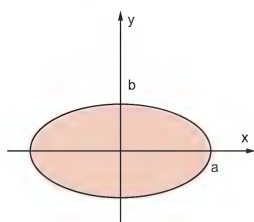
كەواتە پووبەری بازەكە دەكاتە $\frac{\pi r^2}{2}$.

نموونه 2

لەبیرت بێت

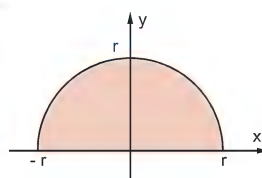
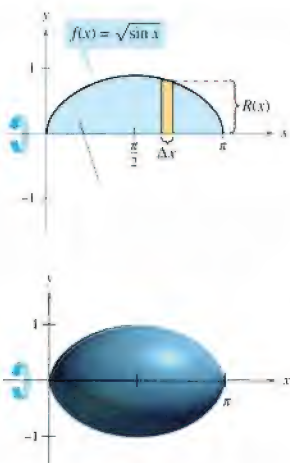
بۆ ئەوێ x هەموو بەهایەكانی
ماوێ $[-r, r]$ وەرگیرێت/دەبێت
 t هەموو بەهایەكانی ماوێ
 $[\pi, 2\pi]$ وەرگیرێت كەواتە
نزمترین پادەى تەواوکاریهكە π
و بەرزترین پادەى 2π دەبێت.

2. ئەم بېرگە ناتەواۋەي بەرامبەرت چەماۋەيەكى داخراۋە
 ھاۋكېشەكەي $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ئەم جوړە چەماۋانە لەبەشى
 داھاتوودا فيردەبېت، بېسەلمېنە پروبەرى ئەو بېرگە
 ناتەواۋە دەكاتە πab .



هەژمارکردنی قەبارەکان

تەواوکاری سنووردار بۆ هەژمارکردنی قەبارەکان بەکار دێت. لەمەودوا
 هەژمارکردنی قەبارەى بارىك (بارىكى تايبەت) لەبارەکان فيردەبېت،
 ئەویش بارى قەبارەى ئەو تەنەيە کە دەستت دەکەوێت لە ئەنجامى
 سووپانى بەشێک لە پروونکردنەوى نەخشە $f(x)$ ، لە ماوەى $[a, b]$ دا بە
 دەورى تەوهرى x بە خولێكى تەواو لە بۆشايیدا. بۆ نموونە گۆ: گۆيەکت
 دەست دەکەوێت کە نیوەتيرەكەى r بێت و چەقەكەى خالى بنەپەت بێت
 لە ئەنجامى سووپانەوى نیوەى سەرەوى بازنەى $x^2 + y^2 = r^2$ بە دەورى
 تەوهرى x بە خولێكى تەواو.
 قەبارەى ئەو جوړە تەنانە هەژمار دەکړيټ بە بەکارهينانى ئەو
 رېساييهى خوارەوه.



هەژمارکردنی قەبارەى تەنيكى خولاۋە

ئەگەر f نەخشەيەكى بەردەوام بێت ئەوا قەبارەى ئەو تەنەى پەيدا دەبێت لە ئەنجامى سووپانەوى
 بەشێک لە پروونکردنەوى نەخشەى $f(x)$ بەخولێكى تەواو لە بۆشايیدا بە دەورى تەوهرى x لە
 ماوەى $[a, b]$ ، بە پێى ئەم رېساييه هەژمار دەکړيټ $V = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx$.

نمونه 3 قەبارەى گۆ

قەبارەى گۆيەك بدۆزەوه، نیوەتيرەكەى r بېت.

شیکار

ئەنجامەكە ناگۆرێت ئەگەر چەقى گۆيەكە لە خالى بنەپەت دابنێت. لەبەرئەوى ئەو گۆيە
 نیوەتيرەكەى r و چەقەكەى خالى بنەپەتە پەيدا دەبێت لە ئەنجامى سووپانەوى نیوەى سەرەوى
 بازنەى $x^2 + y^2 = r^2$ خولێكى تەواو بە دەورى تەوهرى x ، قەبارەكەى دەكاتە بەھای تەواوکاری.

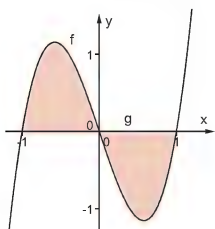
$$V = \pi \int_{-r}^r (f(x))^2 dx = \pi \int_{-r}^r y^2 dx = \pi \int_{-r}^r (r^2 - x^2) dx = \pi \int_{-r}^r r^2 dx - \pi \int_{-r}^r x^2 dx$$

$$= \pi \left[r^2 x - \frac{1}{3} x^3 \right]_{-r}^r = \left[\pi r^3 - (-r^3) - \frac{1}{3} (r^3 - (-r^3)) \right] = \pi \left[2r^3 - \frac{2}{3} r^3 \right] = \frac{4}{3} \pi r^3$$

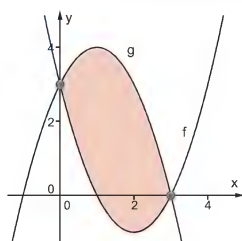
کەواتە قەبارەى گۆيەك نیوەتيرەى r بێت دەكاتە $v = \frac{4}{3} \pi r^3$.

لہ پراھینانی 1 تا 3 تہواوکاری سنووردار بۆ پووبہری ناوچہی سیبہرکراو بنووسہ.

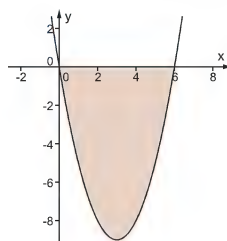
3 $f(x) = 3(x^3 - x)$
 $g(x) = 0$



2 $f(x) = x^2 - 4x + 3$
 $g(x) = -x^2 + 2x + 3$



1 $f(x) = x^2 - 6x$
 $g(x) = 0$



لہ پراھینانی 4 تا 6 نہخشہی ناو تہواوکاری بەشیوہی جیاوازی نیوان دوو نہخشہ ددرہکەویت، پوونکردنەوہی ھەر نہخشەیکە بکیشە، و ئەو ناوچەي کہ تہواوکارییەکە پووبەرەکەمی دەنویئیت سیبەرکە.

6 $\int_0^1 [e^x(-x+1)] dx$

5 $\int_2^3 \left[4\left(\frac{x^3}{3} - x\right) - \frac{x}{3} \right] dx$

4 $\int_0^4 \left[(x+1) - \frac{x}{2} \right] dx$

لہ دوو پراھینانی 7 و 8 ئەو بەھایە ھەلبژێرە کہ باشترین خەملاندن بۆ پووبہری سنووردراو بە پوونکردنەوہی چەماوہی دوو نہخشەکە پیکدەھینیت.

7 $f(x) = x+1$; $g(x) = (x-1)^2$ 1 i 2 ب 10 ج 4 د 8 هـ

8 $f(x) = 2 - \frac{1}{2}x$; $g(x) = 2 - \sqrt{x}$ 1 i 6 ب 3 ج 3 د 4 هـ

لہ پراھینانی 9 تاكو 12 دا ئەو پووبەرە بدۆزەوہ کہ سنووردراوہ بە تەوہری x و پوونکردنەوہی نہخشەکە و دوو راستەھێلی $x=a$ و $x=b$.

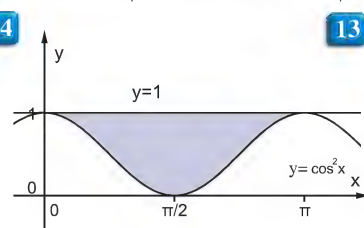
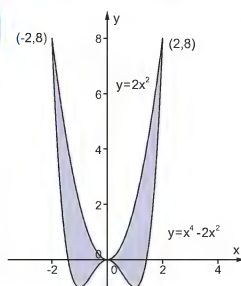
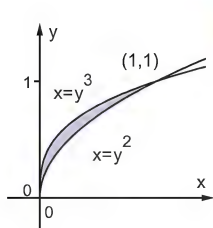
10 $f(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$; $a = -\frac{\pi}{4}$; $b = \frac{\pi}{4}$

9 $f(x) = \sin x$; $a = 0$; $b = \pi$

12 $f(x) = e^{2x}$; $a = 0$; $b = 1$

11 $f(x) = \sqrt{9-x^2}$; $a = -3$; $b = 3$

لہ پراھینانی 13 تا 15 پووبہری ناوچەي سیبہرکراو بدۆزەوہ.



لہ پراھینانی 16 تا 21 خالەکانی یەکتەرپینی پوونکردنەوہی دوو نہخشەکە بدۆزەوہ، لہ پاشاندا پووبہری ئەو ناوچەي سنووری دەدەن بدۆزەوہ.

17 $f(x) = 7 - 2x^2$; $g(x) = x^2 - 4$

16 $f(x) = x^2 - 2$; $g(x) = 2$

19 $x + y^2 = 3$; $4x + y^2 = 0$

18 $x + y^2 = 0$; $x + 3y^2 = 2$

21 $f(x) = \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)$; $g(x) = x$

20 $f(x) = 8 \cos x$; $g(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$; $-\frac{\pi}{3} \leq x \leq \frac{\pi}{3}$

له دوو پرسیاری 22 و 23 دا بهای b بدۆزه ده کاتیځ پاسته هیلی $y=b$ ناوچه ی سنووردراو به دوو پوونکردنه وهی نهخشه که بهش دهکات بو دوو بهشی یهکسان له پووبه ردا.

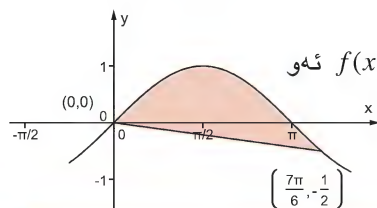
$$22 \quad g(x)=0 ; f(x)=9-x^2 \quad 23 \quad g(x)=0 ; f(x)=9-|x|$$

پاست یان ههله؟ له پرسیاری 24 تاكو 26، دیاریکه نهگهر پسته که پاسته، هوپه که ی لیځبده وه، یان ههله یه به دژه نمونه یه که بیسه لمینه.

24 نهگهر پووبه ی ناوچه ی سنووردراو به ههردوو پوونکردنه وهی f و g بکاته 1، نهوا پووبه ی سنووردراو به دوو چهماوهی $c+h(x)=f(x)$ و $k(x)=g(x)+c$ نهویش دهکاته 1.

$$25 \quad \text{نهگهر } \int_a^b [f(x)-g(x)]dx = A \text{ نهوا } \int_a^b [g(x)-f(x)]dx = -A$$

26 نهگهر ههردوو چهماوهی f و g له خالیځدا که پووتانی x له ناوه پاستی a و b دایه یهکتری بېرن. نهوا $\int_a^b [f(x)-g(x)]dx = 0$.



27 **پووبه** پووبه ی سنووردراو به چهماوهی نهخشه ی $f(x) = \sin x$ نهوا

پارچه پاسته هیلی که خالی بنه پرت دهگه ی نیئت به خالی بدۆزه وه که له وینه که دا دهرده که ویت. $(\frac{7\pi}{6}, -\frac{1}{2})$

دهرباری چهمهکان

28 دوو پوونکردنه وهی نهخشه کانی $f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$ و $g(x) = 1 - x^2$ له 3 خالدا یهکترده بېرن.

له گهل نهویش دهتوانین پووبه ی نیوانیان ههژماریکه ی به به کار هیلانی یه که تهواوکاری سنووردراو هوپه کانی نهگهر کاره پوونیکه وه و تهواوکاریه که بنووسه.

له پرسیاری 29 تا 32 قهبارهی نهو تهنه بدۆزه که له نهنجامی خولانه وهی ناوچه دیاریکراو به پوونکردنه وهی هاوکیشهکان به دهوری تهوه ی x دروست ده بیت.

$$29 \quad x=2, y=0, y=x^2 \quad 30 \quad y=0, y=\sqrt{9-x^2}$$

$$31 \quad x=0, y=1, y=x \quad 32 \quad y=x+3, y=x^2+1$$

33 تهواوکاری به کار بهینه بو دۆزینه وهی قهبارهی نهو تهنه ی له نهنجامی خولانه وهی سیځو شه ی

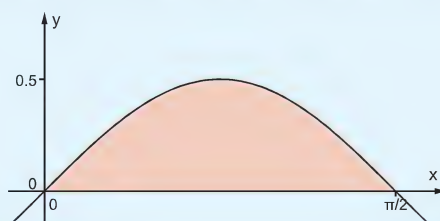
$(0,0)$, $(b,0)$, $(0,h)$ به دهوری تهوه ی x دا دروست ده بیت.

34 تهواوکاری به کار بهینه بو نووسینه وهی پرسیای ههژمارکردنی قهبارهی قوچه کیځ که نیوه تیره ی بنکه که ی r و به رزییه که ی h بیت.

به رده نگاری

35 قهبارهی نهو تهنه بدۆزه که له نهنجامی خولانه وهی ناوچه ی سنووردراو به چهماوهی

نهخشه ی $f(x) = \cos x \sin x$ و تهوه ی x به دهوری تهوه ی x دا دروست ده بیت.



پیداچوونەوێ بەش

لە پرسىارى 1 تاكو 4 تەواوكارى بۆسەوور بدۆزەو.

$$\int \frac{2}{\sqrt[3]{3x}} dx \quad \text{1} \quad \int (2x^2 + x - 1) dx$$

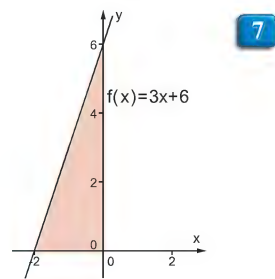
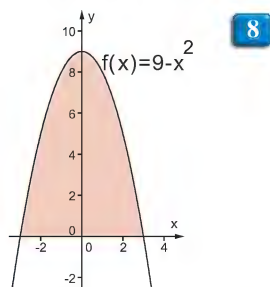
$$\int \left(5 \cos x - \frac{2}{\cos^2 x} \right) dx \quad \text{2} \quad \int \frac{x^3 + 1}{x^2} dx$$

5 **خێرایى و تاودان** فرۆكەيەك دواى برىنى ماوێ 1350m لەسەر پارپەوێكەى هەستا. فرۆكەكە لەخاڵى وەستانەو بە تاودانىكى نەگۆر دەرچوو بۆ ماوێ 30 چركە پێش هەستانى، خێرايىيەكەى چەندبوو لەكاتى هەستانیدا؟

6 **خێرایى و تاودان** تۆپێك بەشاوڵى بەرمو سەرەو هەلەرا لەئاستى پرووى زەويىو بەخێرايىيە سەرەتای كە برەكەى 30m/s بوو.

- ا تۆپەكە چەند كاتى پێويستە بۆ ئەوێ بگاتە بەرزترى خاڵ؟
- ب بەرزى ئەم خاڵە چەندە؟
- ج كەى خێرايى تۆپەكە دەكاتە نيوێ خێرايىيە بنەرەتییەكەى؟
- د بەرزى تۆپەكە چەندە كاتێك خێرايىيەكەى دەكاتە نيوێ خێرايىيە بنەرەتییەكەى؟

لە دوو پرسىارى 7 و 8 دا تەواوكارىيەكى سنووردار بنووسە بۆ هەژماركردنى رۆبەرە سێبەرەكراوەكان.



لە دوو پرسىارى 9 و 10 دا وێنەى رۆبەرەى ئەو ناوچەى كە تەواوكارىيەكە دەبنوێنێت بكێشە.

$$\int_{-4}^4 \sqrt{16 - x^2} dx \quad \text{9} \quad \int_0^5 (5 - |x - 5|) dx$$

11 ئەمانەى خوارەو هەژمارىكە ئەگەر زانیت 10 و $\int_2^6 g(x) dx = 3$ و $\int_2^6 f(x) dx = 10$.

$$\int_2^6 [f(x) - g(x)] dx \quad \text{ا} \quad \int_2^6 [f(x) + g(x)] dx$$

$$\int_2^6 5f(x) dx \quad \text{ب} \quad \int_2^6 [2f(x) - 3g(x)] dx \quad \text{ج}$$

12 ئەمانەى خوارەو هەژمارىكە ئەگەر زانیت 4 و $\int_0^3 f(x) dx = 4$ و $\int_3^6 f(x) dx = -1$.

$$\int_3^6 -10f(x) dx \quad \text{د} \quad \int_4^4 f(x) dx \quad \text{ه} \quad \int_6^3 f(x) dx \quad \text{و} \quad \int_0^6 f(x) dx \quad \text{ز}$$

له راهیتانی 13 تا 16 وینهی ئه ناوچهی که تهواوکارییه که پروبه ره که ی دهنوینیت بکیشه، و پروبه ره که بدۆزه وه.

$$\int_0^3 (2x+1)dx \quad 13$$

$$\int_0^1 (x-x^3)dx \quad 14$$

$$\int_0^1 \sqrt{x}(1-x)dx \quad 15$$

$$\int_3^4 (x^2-9)dx \quad 16$$

له راهیتانی 17 تا 20 تهواوکارییه بیسنووره که بدۆزه وه.

$$\int (x^2+1)^3 dx \quad 17$$

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{x^3+3}} dx \quad 18$$

$$\int \sin^3 x \cos x dx \quad 19$$

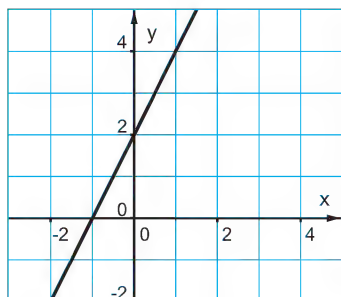
$$\int \frac{\sin \theta}{\sqrt{1-\cos \theta}} d\theta \quad 20$$

21 بههای ناوهند بۆ نهخشهی $f(x)$ له ماوهی I بدۆزه وه.

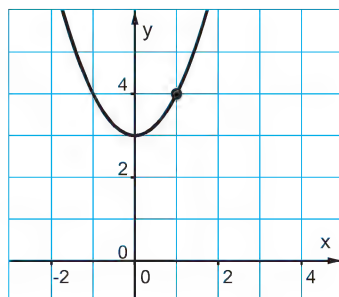
$$I=[0,4] ; f(x)=\sqrt{x} \quad \text{ا}$$

$$I=[0,a] ; f(x)=a\sqrt{x} \quad \text{ب}$$

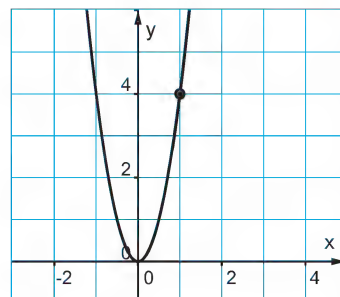
22 بنۆسه کام له مانهی خواره وه پوونکردنه وهی نهخشیه، که $f'(x)=2x$ و $f(1)=4$ پاسادان دهکات.



(ا)



(ب)



(ج)

ئامادەکاری بۆ تاقیکردنەوه

1 ئه‌گەر $\int_a^b f(x)dx = a + 2b$ ئه‌وا به‌های $\int_a^b [f(x) + 3]dx$ ده‌کاته.

☐ 1 $a + 2b + 3$
☐ 2 $3b - 3a$
☐ 3 $4a - b$

☐ 4 $5b - 2a$
☐ 5 $5b - 3a$

2 به‌های k چهنده که‌وا ده‌کات $\int_2^k x^2 dx = 0$.

☐ 1 -2
☐ 2 0
☐ 3 2

☐ 4 $2, -2$
☐ 5 $0, 2, -2$

3 کام له‌مانه‌ی خواره‌وه ده‌کاته ئامانجی $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t)dt$ ؟

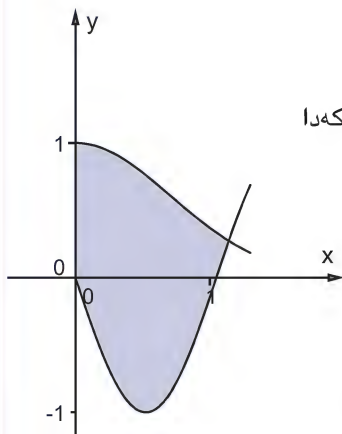
☐ 1 0
☐ 2 1
☐ 3 $f'(x)$

☐ 4 $f(x)$
☐ 5 جگه له‌وانه

4 کام له‌مانه‌ی خواره‌وه ده‌کاته پڕوبه‌ری ناوچه‌ی سنووردراو به پڕونکردنەوه‌یی دوو نه‌خشه $y = x^2$ و $y = -x$ و دوو راسته‌هێڵی $x = 0$ و $x = 3$ بریتیه له.

☐ 1 2
☐ 2 $\frac{9}{2}$
☐ 3 $-\frac{9}{2}$

☐ 4 13
☐ 5 $\frac{27}{2}$



5 R پڕوبه‌ری ناوچه‌ی سنووردراو به $y = e^{-x^2}$ و $y = -\sin 3x$ ته‌وه‌ری y وه‌ك له‌وینه‌كه‌دا ده‌ركه‌وتوو. کام له‌مانه به‌های نزیکراوه‌یی پڕوبه‌ری ئه‌و ناوچه‌یه ده‌نوینیت؟

☐ 1 1.139
☐ 2 1.445
☐ 3 1.869

☐ 4 2.114
☐ 5 2.340

6 کام له‌مانه‌ی خواره‌وه ده‌کاته پڕوبه‌ری سنووردراو به هه‌ردوو چه‌ماوه‌ی نه‌خشه‌ی $f(x) = e^x$, $g(x) = \frac{1}{x}$ له‌لایه‌ك هه‌ردوو راسته‌هێڵی $x = 1$ و $x = 2$ له‌لایه‌کی تر.

☐ 1 $e^2 - e - \ln 2$
☐ 2 $\ln 2 - e^2 + e$
☐ 3 $e^2 - \frac{1}{2}$

☐ 4 $2 - e - \frac{1}{2}$
☐ 5 $\frac{1}{2} - \ln 2$

برگه قوچه كيهكان Conics

بەشى شەشەم

وانەكان

- 1-6 برگه قوچه كيهكان
 2-6 پۆلینكردى برگه قوچه كيهكان
 تاقىكرىنەوەى نیوەى بەش
 3-6 ھاوکیشە دوو جایەكان بە دوو
 گۆراو
 پیداجوونەوە
 نامادەكارى بۆ تاقىكرىنەوە

هەسارەكانى كۆمەلەى خۆر بەدەورى
 خۆردا دەخولپنەوە لە چەندەها خولگە كە
 شپوەى برگهى ناتەواو وەردەگرن و پۆژ
 دەورى تیشكۆ دەبینیت. زۆربەى ئەو
 خولگانە نیمچە بازەنیین، خولگهى پلوتۆ
 Pluto بازەنییەكەى لەوانى تر كەمترە
 ھەر وەھا (مەتارد) mercury، ھەندىك
 خولگە ھەن، شپوەى برگهى ناتەواوى
 دریزن، وەك خولگهى ئەستیرەى بچووك
 (ئىكار) Icarus كە ئەستیرەى بچووكە
 پانییەكەى كەمىك زیاترە لە 1,5 km و
 لەماوەى 409 پۆژ جارێك بەدەورى پۆژدا
 دەخولپنەوە.

ئايا تۆ ئامادەيت؟

زاراۋەكان ✓

- 1 هەر دەستەۋازدەك لەستوونی لای راست بېستەو بە لیکدانەوێکە لە ستوونی لای چەپ.
1. بازنە
2. بېگەى ھاوتا
3. لەتکەرى گۆشە
4. دەرکەنارى ئاسۆیى
- ا. راستەھێڵیکە گۆشە بەشەدەكات بۆ دوو گۆشەى جووت بوو.
- ب. راستەھێڵیکە بازنە دەکاتە دوو کەرتى جووت بوو.
- ج. کۆ مەلە خالیکی پروتەختیکە ھەمان دووریان لە خالیکی دیاریکراو ھەيە.
- د. پروونکردنەوێ نەخشەى دووجا.
- ھ. راستەھێڵیکى ئاسۆیى پروونکردنەوێ نەخشە لى نزیك دەبێتەوێ کاتیك x نزیك دەبێتەوێ لە $\pm \infty$.

بازنە ✓

- لە راھێنانى 2 تا 5 چەقى بازنەو نیوەتیرەكەى دیاریبکە.
- 2 $x^2 + y^2 = 49$
- 3 $x^2 + (y+1)^2 = 25$
- 4 $(x-5)^2 + y^2 = 15$
- 5 $(x-2)^2 + (y+3)^2 = 36$
- لە راھێنانى 6 تا 9 ھاوکیشەى بازنەكە بدۆزەوێ.
- 6 چەق: $(0, 3)$ ، نیوەتیرە $\sqrt{5}$.
- 7 چەق: $(0, 0)$ ، نیوەتیرە 8.
- 8 چەق: $(5, 0)$ ، نیوەتیرە 13.
- 9 چەق: $(5, -3)$ ، نیوەتیرە $\sqrt{2}$.

یاسای دوورى ✓

- لە راھێنانى 10 تا 12 دوورى نیوان دوو خالەكە بدۆزەوێ.
- 10 $(0, 2)$ و $(4, 5)$
- 11 $(3, -5)$ و $(-2, -10)$
- 12 $(-5, 1)$ و $(3, 6)$
- لە راھێنانى 13 تا 16 دوورى نیوان خالەكەو راستەھێڵەكە بدۆزەوێ.
- 13 خالی: $(3, 5)$ ، راستەھێڵى $y = -5$
- 14 خالی: $(-7, -9)$ ، راستەھێڵى $x = 2$
- 15 خالی: $(3, 3)$ ، راستەھێڵى $x + y = 1$
- 16 خالی: $(-2, 3)$ ، راستەھێڵى $y = -2x + 5$

تەواوکردنى دووجا ✓

- لە راھێنانى 17 تا 20 بېرە جەبریەكە تەواوبکە بۆ ئەوێ بېتە دووجای تەواو:
- 17 $3x^2 + 6x$
- 18 $5y^2 + 20y$
- 19 $x^2 + x$
- 20 $y^2 - 3y$

برگه قوچهکیهکان Conic Sections

1-6

ئامانجهکان

- برگه قوچهکیهکان پیناسه دهکات.
- هاوکیشی برگه‌ی هاوتا دهنوسیت و پیکهاتهکانی دیاریدهکات.
- هاوکیشی برگه‌ی ناتهاوا دهنوسیت و پیکهاتهکانی دیاریدهکات.
- هاوکیشی برگه‌ی زیاد دهنوسیت و پیکهاتهکانی دیاریدهکات.
- وینی برگه قوچهکیهکان دهکیشیت.

زاراوهکان Vocabulary

Parabola	برگه‌ی هاوتا
Ellipse	برگه‌ی ناتهاوا
Hyperbole	برگه‌ی زیاد
Focus	تیشکۆ
Directrix	دهلیل
Vertex	سه‌ر
Focal axis	تهوهری تیشکۆیی
Major axis	تهوهری گه‌وره
Minor axis	تهوهری بچووک
Real axis	تهوهری راستی
Cojugate axis	تهوهری ئاوه‌ل

پیره‌وی هه‌ساره‌کان و مانگه‌کان و تنه‌کانی تر (هه‌تا ئه‌لیکترۆنه‌کانیش) برگه قوچهکیهکان پیکده‌هین، که جووله‌یان دیاریده‌کریت به‌هیزیک پیچه‌وانه هاو‌پژیه له‌گه‌ل دووجای دوریه‌یه‌کان، له‌کاتی‌دا زانیت پیره‌وی ته‌نیکي جولاً و برگه‌یه‌کی قوچه‌کی دیاریکراوه تا زانیاریه‌کانت ده‌رباره‌ی خیرایی و ئه‌و هیزه‌ی ته‌نه‌که ده‌جولینیت ده‌ست نه‌که‌ویت. له‌م به‌شده‌ی فیری به‌یه‌کتریه‌ستنی نیوان برگه قوچهکیهکان و هاوکیشی دووجایه‌کانی دوو گۆراو ده‌بیت. هه‌روه‌ها فیری پۆلینکردنی برگه قوچهکیهکان ده‌بیت به‌پیی جیاوازی چه‌قه‌کانیان Eccentricity.

برگه قوچهکیهکان

زانا گریه‌کان له‌سه‌رده‌می ئه‌فلاتوندا برگه قوچهکیه‌کانیان به‌و هیلله‌ چه‌ماوانه‌ی که له ئه‌نجامی برینی قوچه‌کیکی دووانی به‌ پروته‌ختیک په‌یداده‌بیت پیناسه‌کردوه. به‌لام ئیستا زانیاه‌کانی بیرکاری برگه قوچهکیه‌کان به‌ به‌کاره‌یانی یاسای دوری له‌ پروته‌ختی پۆوتانه‌کان پیناسه‌ده‌کن.

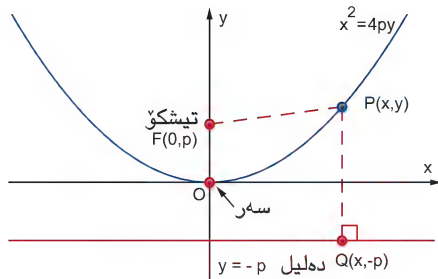


زۆر پێگا هه‌یه‌ بۆ پیناسه‌کردنی برگه قوچهکیه‌کان. ده‌توانیت وا پیناسه‌ی بکه‌یت، که له ئه‌نجامی برینی قوچه‌کیکی دووانی به‌ پروته‌ختیک دروست ده‌بیت، وه‌ک ئه‌وه‌ی گریه‌کان کردیان و ده‌توانیت به‌شوه‌ی جه‌بری پیناسه‌ی بکه‌یت، که بریتییه‌ له‌ نواندن پرونکردنه‌وه‌یی هاوکیشی پله‌ دووی دوو گۆراو.

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

هه‌روه‌ها ده‌توانیت به‌م شۆه‌یه‌ پیناسه‌ی بکه‌یت، بریتییه‌ له‌ کۆمه‌له‌ خالیک له‌ پروته‌ختیکدا که پاسادانی مه‌رجیکی ئه‌ندازه‌یی دیاریکراو ده‌کات. ئاسانه‌ترین نمونه‌ی ئه‌م پێگایه‌ پیناسه‌ی بازه‌یه‌، که بریتییه‌ له‌ کۆمه‌له‌ خالیک له‌ پروته‌ختیکدا، هه‌مان دوریه‌یان هه‌یه‌ له‌ خالیکی دیاریکراو.

برگه‌ی هاوتا



له پۆلی ده فیروبویت که پروونکردنهوهی نهخشهیهکی دووجا برگه‌یهکی هاوتایه، لهم وانهیدا سیفه‌تیکێ بنه‌په‌تی فیروده‌بیت بۆ ئه‌وه‌ی پیناسه‌یه‌کی ئه‌ندازه‌یی برگه‌که بکه‌یت. برگه‌ی هاوتا به‌کێکه له برگه قوچه‌کییه بنه‌په‌تییه‌کان و سیفه‌تی وینه‌دانه‌وه‌ی هه‌یه که وای لێده‌کات بواری به‌کاره‌ێنانی فراوانبێت.

برگه‌ی هاوتا Parabola

برگه‌ی هاوتا: کۆمه‌له‌ خاڵێکه له پروته‌ختێکدا که هه‌مان دووریان هه‌یه له خاڵێکی دیاریکراو (پێی دهوتریت تیشکۆ) و له راسته‌هێڵێک که پێیدا ناروات (پێی دهوتریت ده‌لیل). خاڵی ناوه‌راستی نیوان تیشکۆ و ده‌لیل پێی دهوتریت سه‌ری برگه، به‌لام ئه‌و راسته‌هێڵی به تیشکۆ و سه‌ری برگه‌که‌دا ده‌روات پێی دهوتریت ته‌وه‌ری برگه‌ی هاوتا. به‌پوانینت بۆ وینه‌که‌ی سه‌روه‌ که برگه‌یه‌کی هاوتا ده‌رده‌خات، بۆت ده‌رده‌که‌وێت که هاوچێیه له‌گه‌ڵ ته‌وه‌ره‌که‌ی که ده‌بێته ته‌وه‌ری هاوچی.

ئه‌گه‌ر سه‌ری برگه‌ هاوتایه‌که خاڵی (h, k) بێت و هاوکیشه‌ی ده‌لیله‌که‌ی $y = k - p$ بێت، ئه‌وا پووتانی تیشکۆیه‌که‌ی ده‌کاته $(h, k + p)$ ، دووری نیوان خاڵی $P(x, y)$ و تیشکۆ ده‌کاته $\sqrt{(x-h)^2 + (y-(k+p))^2}$ و ده‌لیل نیوان P و ده‌لیله‌ ده‌کاته $\sqrt{(y-(k-p))^2}$. ئه‌گه‌ر P دانه‌ی برگه‌ی هاوتایه‌که بێت ئه‌وا:

$$\begin{aligned}\sqrt{(x-h)^2 + (y-(k+p))^2} &= \sqrt{(y-(k-p))^2} \\ (x-h)^2 + (y-(k+p))^2 &= (y-(k-p))^2 \\ (x-h)^2 + y^2 - 2y(k+p) + (k+p)^2 &= y^2 - 2y(k-p) + (k-p)^2 \\ (x-h)^2 + 2y(k-p) - 2y(k+p) + (k+p)^2 - (k-p)^2 &= 0 \\ (x-h)^2 - 4(y-k)p &= 0 \\ (x-h)^2 &= 4p(y-k)\end{aligned}$$

له‌به‌رامبه‌ردا ده‌توانیت بیسه‌لمینیت که خاڵی $P(x, y)$ پاسادانی په‌یوه‌ندی $(x-h)^2 = 4p(y-k)$ ده‌کات و ده‌که‌وێته سه‌ر ئه‌و برگه‌ هاوتایه‌ی سه‌ره‌که‌ی (h, k) و ده‌لیله‌که‌ی $y = k - p$ بێت.

هاوکیشه‌ی برگه‌ هاوتا

شیوه‌ی گشتی: هاوکیشه‌ی برگه‌ی هاوتا که سه‌ره‌که‌ی (h, k) و ده‌لیله‌که‌ی راسته‌هێڵی $y = k - p$ بێت ده‌کاته $(x-h)^2 = 4p(y-k)$ له‌و باره‌دا ته‌وه‌ری برگه‌که ده‌بێته راسته‌هێڵی ستوونی $x = h$ و تیشکۆیه‌که‌ی خاڵی $(h, k + p)$ یه، به‌لام ئه‌گه‌ر سه‌ره‌که‌ی (h, k) و هاوکیشه‌ی ده‌لیله‌که‌ی $x = h - p$ شیوه‌ی گشتی هاوکیشه‌یه‌که‌ی ده‌بێته $(y-k)^2 = 4p(x-h)$ له‌م باره‌دا ته‌وه‌ری برگه‌که راسته‌هێڵی ئاسۆیی $y = k$ و تیشکۆیه‌که‌ی خاڵی $(h + p, k)$ ده‌بێت.

يېڭى ھاۋتا بىرگە ھاۋتا $y = -\frac{1}{2}x^2 - x + \frac{1}{2}$ بدۆزەۋە (تېشكۆ ۋە سەر ۋە دەلىل ۋە تەۋرەكە) شىكار

سەرەتا ھاۋكىشە بىرگە ھاۋتا يەكە بەشۋە گىشتى بە بەكارھىننى تەۋاكرىنى دوۋجا بنوۋسە.

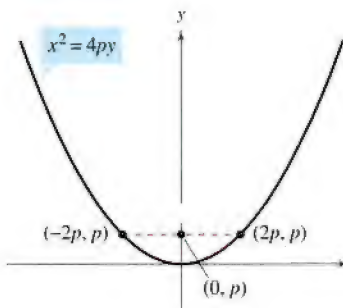
$$y = -\frac{1}{2}x^2 - x + \frac{1}{2} \Rightarrow y = -\frac{1}{2}(x^2 + 2x + 1) + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \Rightarrow (x+1)^2 = -2(y-1)$$

بە بەرۋر دىكرىن لەگەل شۋە گىشتىيەكەى كە تەۋرى ستونى ھەيە دەردەچىت $h = -1, k = 1, p = \frac{1}{2}$ لەمەۋە بۆمان دەردەچىت كە تېشكۆ بىرگە بەرېتتە لە خالى $(h, k + p) = (-1, \frac{1}{2})$ ۋە خالى سەرى بىرگە $(h, k) = (-1, 1)$ ۋە ھاۋكىشە دەلىلەكەى راستەھىلى $y = k - p = 1.5$ تەۋرەكەى راستەھىلى $x = h = -1$.

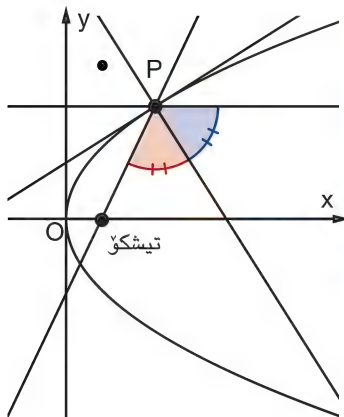
1. يېڭى ھاۋتا يەكە بەشۋە بدۆزەۋە $2x + y^2 + 2y - 1 = 0$.



يەكەلە سىفەتەكانى بىرگە ھاۋتا كە زۆر بەكار دىت، (سىفەتى تېشكەنەۋەيە) زانا فېزىيەكان بە پۈۋىكە دەلېن تېشكەنەۋە ئەگەر ئەۋ گۆشە يېڭى بە تېشكى بەركەۋتۋى روۋەكە ۋە لېكەۋتەكەى لە خالى بەركەۋتندا جوۋت دەبىت لەگەل ئەۋ گۆشەيە تېشكەكە دروستىدەكات پاش تېشكەنەۋە لەگەل لېكەۋتەكەى. يەكەم گۆشە پىي دەۋترىت گۆشە بەركەۋتن ۋە بەگۆشەى دوۋەم دەۋترىت گۆشەى تېشكەنەۋە، پۈۋى ئاۋىنەكانى مالىۋە ساكارترىن نمونەيە لە پۈۋە تېشكەنەكان.



چەند جۆرىكى تر لە پۈۋە تېشكەنەۋەكان ھەيە ۋەك سىلەكانى (صحن) ۋەرگرتنى پەخشى تەلەفزيۋنى لە مانگە دەستكرەكان كە لە ئەنجامى سورانەۋەى بىرگەيەكى ھاۋتا بە دەۋرى تەۋرى ئەم پۈۋانە دروست دەبن، ئەم پۈۋە تېشكەنەۋە سىفەتېكى گرېنگيان ھەيە، كە تېشكە بەركەۋتۋەكان بەشۋەى تەرىب بە تەۋرەكەى ۋەردەگرىت ۋە دەيداتەۋە بەۋ جۆرەى كە بە تېشكۆ بىرگەكەدا بىرۋات. ھەرۋەھا ھەمو ئەۋ تېشكەنەى كە تېشكۆ پەخشى دەكاتەۋە بە ئاراستەى پۈۋەكە تېشكى تەرىب بە تەۋرى بىرگە ھاۋتا يەكە تېشكەداتەۋە.

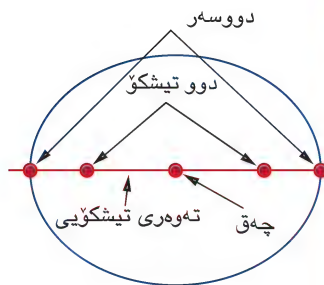


سىفەتى تېشكەنەۋەى بىرگە ھاۋتا

ئەستۈنى سەر لېكەۋتى بىرگە ھاۋتا لە خالى P كە يەكەلە لە خالەكانى دەبىتە لەتەرى ئەۋ گۆشەى كە دروست دەبىت لەنېۋان ئەۋ راستەھىلى كە بە خالەكەۋ تېشكۆدا دەپۋات لەگەل راستەھىلىكى تەرىب بە تەۋرەكەى كە بە P دا دەپۋات.

برگه‌ی نات‌ه‌واو

زانای پۆلۆنی (نیکۆلاس کۆپەرنیکس) Nicolas Copernics دەریخست که هەسارەکان (لەناوایاندا زەوی) بە دەوری خۆردا دەخولێنەوێه له چەندەها خولگە‌ی بازەنییدا که خۆر چەقەکە‌یەتی، بە‌لام زانای ئەلمانی یۆهانس کیپلر Johannes Kepler بێردۆزەکی کۆپرنیکسی راستکردووە و پرونیکردووە که هەسارەکان بە دەوری خۆردا دەخولێنەوێه به چەندەها خولگە که له شیۆه‌ی برگه‌ی نات‌ه‌واو (Ellipse) و خۆر دە‌بێتە یه‌کێک له تیشکۆکانی. یه‌کێک له به‌کاره‌ینانه‌کانی برگه‌ی نات‌ه‌واو پروونکردنەوێه جولانەوێه هەسارەکانه. بۆ ناسینی برگه‌ی نات‌ه‌واو له پێگای پێناسه‌کە‌یه‌وه دەستپێدەکەین وه‌ک له برگه‌ی هاوتا کردمان که کۆمه‌له‌ خاڵێکه له پروتەختی‌دا به مەرجی‌کی دیاریکراو، بۆ پێناسه‌کردنی برگه‌ی نات‌ه‌واو دوو تیشکۆ باس ده‌کەین له‌جیاتی یه‌ک تیشکۆ وه‌ک له برگه‌ی هاوتا هاتبوو.



برگه‌ی نات‌ه‌واو

برگه‌ی نات‌ه‌واو: کۆمه‌له‌ خاڵێکه له پروتەختی‌دا که سەرجه‌می دووریان له دوو خاڵی دیاریکراو (تیشکۆ) ده‌کاته به‌هایه‌کی نه‌گۆڕ. به‌م دوو خاڵه‌ ده‌وتریت دوو تیشکۆی برگه‌ نات‌ه‌واوه‌که، ئەو راسته‌هێله‌ی که دوو تیشکۆیه‌که‌ی له‌سەر پێی ده‌وتریت تەوهری تیشکۆیی یان تەوهری گه‌وره‌ که ده‌که‌وێتە نیوان هەردوو سەری برگه‌که، و ناوه‌راستی ئەم تەوهریه‌ ده‌بێتە چەقی برگه‌که و راسته‌هێلی ئەستوون له‌سەر تەوهری تیشکۆیی له‌ چەقەکه‌یدا که برگه‌که ده‌بێت له‌ دوو خاڵ پێی ده‌وتریت دوو سەری بچووک، ئەو راسته‌هێله‌ی دوو سەر بچووک‌که به‌یه‌ک ده‌گه‌ینێت پێی ده‌وتریت (تەوهری بچووک) ی برگه‌ی نات‌ه‌واو.

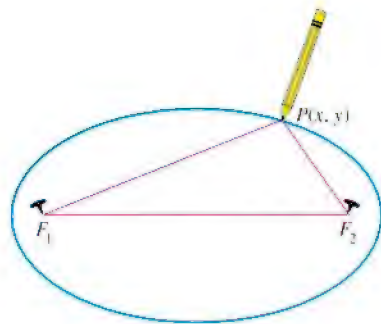
له‌بیرت بێت

a و b و c به‌یه‌وه‌ندی

$$c^2 = a^2 + b^2$$

ده‌به‌ستری‌نه‌وه به‌پێی

سه‌لمی‌نراوی فیساگۆرس.



ئاسانترین پێگا بۆ وێنه‌کێشانی برگه‌ی نات‌ه‌واو به‌ زانینی دوو تیشکۆیه‌که‌ی به‌کاره‌ینانی پێناسه‌کە‌یه‌تی. داویک بگره به‌ده‌سته‌وه که درێژییه‌که‌ی بکاته سەرجه‌می دوو دووری خاڵێکی سەر برگه‌که له دوو تیشکۆکانیه‌وه و هەردوو سەری داوه‌که له دوو تیشکۆکه‌ی F_1 و F_2 گیرێکه. داوی ئەوه قه‌له‌مێک له‌ داوه‌که به‌سته‌وه بيجولێنه وێنه‌یه‌کت ده‌ست ده‌که‌وێت که بریتییه له کۆمه‌له‌ خاڵێک که سەرجه‌می دوو دوورییه‌کانیان له تیشکۆکانه‌وه یه‌کسانه به درێژی داوه‌که ئەمه‌ش برگه‌ی نات‌ه‌واوه داواکراوه‌که‌یه.

ئەگەر دوو تیشکۆکان خاڵه‌کانی $F_1(-c, 0)$, $F_2(c, 0)$ بن که $PF_1 + PF_2 = 2a$ کاتی‌ک خاڵی $P(x, y)$ له خاڵه‌کانی برگه‌که بێت ئەم په‌یوه‌ندییه پاسادان ده‌کات.

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$$

بۆ ساده‌کردنی ئەم هاوکێشه‌یه هەریه‌کێک له پەگه‌کان له‌ لایه‌ک دا‌بنی و هەردوو لای دووجا بکه. داوی ئەو پەگه‌ی

ده‌مینێتەوه، له‌ لایه‌ک به‌ته‌نیا دا‌بنی و بۆ جاری دووهم

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1$$

له لايه كې ترهوه ده توانين تيښيني ئهمه ي خوارموه بكهين ئه گهر پوټوانى خالى $P(x, y)$ پاسادانى هاوكيشه كې پيشووى كرد ئهوا پاسادانى $PF_1 + PF_2 = 2a$ دهكات ئهوا خالى $P(x, y)$ دهكه ويته سهر برگه ي ناتهواو ئه گهر و تهنه ئه گهر پوټوانه كې پاسادانى هاوكيشه ي سهرهوه بكات. له بهرته وهى $PF_1 + PF_2 > F_1 F_2$ (لاسهنگه ي سيگوشه ي سهر به سيگوشه ي $PF_1 F_2$) ئهوا $2a > 2c$ له پاشدا $a > c$ له وهوه دهرده چيټ كه $a^2 - c^2$ ژماره يه كې موجه به، ئه گهر واماندانا b رڼگي دووجاى $a^2 - c^2$ هاوكيشه كه ده بښت. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

ئهمه ش شيوه ي ساده ي هاوكيشه ي برگه ي ناتهواوه كه چهقه كې خالى بنه رته. لهو هاوكيشه دا دهرده كه ويټ كه برگه ي ناتهواو هاوجيټه له گهل ههردوو تهوهره كان و خالى بنه رته و دهكه ويته ناو لايكيشه يه ك سنووردراوه بهم راسته هيلانه $x = a, x = -a, y = b, y = -b$ كه ليكهوتن بو برگه كه له 4 خالدا كه ئهمانه.

• ههردوو سهرى برگه $(a, 0), (-a, 0)$.

• ههردوو سهرى بچووك $(0, b), (0, -b)$

له كوټاييدا ليكهوته كانى برگه قوچه كيه كه لهو خالانه ي سهرهوه له گهل تهوهرى پوټوانه كان ئهستونه، بهلام ئه گهر چهقه ي برگه كه خالى بنه رته نه بښت ئهوا شيوه ي هاوكيشه ي برگه ناتهواوه كه بهم شيويه ده بښت.

$$\text{ئه گهر تهوهرى تيشكو ي ئاسوي بيټ و بهم شيويه بيټ:} \quad \frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

$$\text{ئه گهر تهوهرى تيشكو ي ئهستونى بيټ. ليره دا } a > b \text{ هه موو كات له بريت} \quad \frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$$

بيټ پوټوانى چهق له م باره دا خالى (h, k) ده بښت.

هاوكيشه ي برگه ي ناتهواو

شيوه ي گشتى هاوكيشه ي برگه ناتهواو بريتيه له :

$$\text{كاتيك تهوهرى تيشكو ي ئاسوي بيټ.} \quad \frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

$$\text{كاتيك تهوهرى تيشكو ي ستونى بيټ.} \quad \frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$$

لهو هاوكيشه يه دا a نيوه ي تهوهرى گه وره يه و b نيوه ي تهوهرى بچووكه و (h, k) چهقه.

پيكهاته كانى برگه ي ناتهواو:

• دوورى نيوان تيشكو و چهق: c

• سهره كان $(h \pm c, k)$ ئه گهر تهوهرى تيشكو ي ئاسوي بيټ و $(h, k \pm a)$ ئه گهر ئهستونى بيټ.

• دوو سهره بچووكه كه $(h, k \pm b)$ ئه گهر تهوهرى تيشكو ي ئاسوي بيټ و $(h \pm b, k)$ ئه گهر ئهستونى بيټ.

• دوو تيشكو يه كان $(h \pm c, k)$ ئه گهر تهوهرى تيشكو ي ئاسوي بيټ و $(h, k \pm c)$ ئه گهر ئهستونى بيټ.

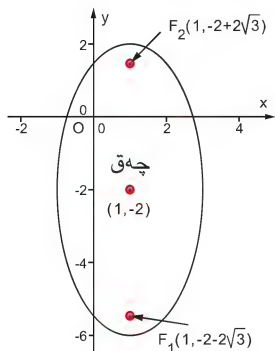
نمونه 2

دۆزینه‌وې پیکهاته‌کانی برځه‌ی ناته‌واو

پیکهاته‌کانی برځه ناته‌واوې $4x^2 + y^2 - 8x + 4y - 8 = 0$ بدۆزه‌وه.

شیکار

هاوکیشی برځه ناته‌واوکه بگۆره بۆ شیوه‌ی گشتی به ته‌واوکردنی دوجا بۆ x و y



$$4x^2 + y^2 - 8x + 4y - 8 = 0$$

$$4x^2 - 8x + y^2 + 4y = 8$$

$$4(x^2 - 2x + 1) + (y^2 + 4y + 4) = 8 + 4 + 4$$

$$4(x-1)^2 + (y+2)^2 = 16$$

$$\frac{(x-1)^2}{4} + \frac{(y+2)^2}{16} = 1$$

له‌م هاوکیشیه‌ ده‌رده‌چیت‌که:

$$k = -2, h = 1, c^2 = a^2 - b^2 = 12, b^2 = 4, a^2 = 16$$

ناوه‌راستی ته‌وه‌ری گه‌وره $a = \sqrt{16} = 4$ ناوه‌راستی ته‌وه‌ری بچووک $b = \sqrt{4} = 2$

چەق $(h, k) = (1, -2)$ دووری نیوان تیشکۆ و چەق $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{16 - 4} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$

دوو تیشکۆ: $(h, k \pm c) = (1, -2 \pm 2\sqrt{3})$

$$(h \pm b, k) = (1 \pm 2, -2) = \begin{cases} (3, -2) \\ (-1, -2) \end{cases} \text{ دوو سه‌ری ته‌وه‌ری بچووک}$$

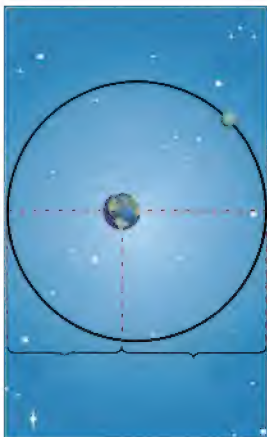
$$(h, k \pm a) = (1, -2 \pm 4) = \begin{cases} (1, 2) \\ (1, -6) \end{cases} \text{ دوو سه‌ری ته‌وه‌ری گه‌وره}$$

2. پیکهاته‌کانی برځه ناته‌واوې $2x^2 + 3y^2 + 4x + 6y - 1 = 0$ بدۆزه‌وه.



نمونه 3

خولگه‌ی مانگ



خولگه‌ی مانگ به‌ده‌وری زه‌ویدا برځه‌یه‌کی ناته‌واوه یه‌کیک

له تیشکۆیه‌کانی چەقی زه‌وییه‌ دریژی ته‌وه‌ری گه‌وره‌ی

768 800 km ودریژی ته‌وه‌ری بچووک 767 640 km نایا

دوورترین خال و نزیکترین خال له‌چەقی زه‌وییه‌وه چهنده

که مانگ پێیدا ده‌روات.

شیکار

به‌های a و b بدۆزه‌وه.

$$2a = 768800 \Rightarrow a = 384400$$

$$2b = 767640 \Rightarrow b = 383820$$

$$c = \sqrt{a^2 - b^2} \approx 21108 \text{ به‌های } c$$

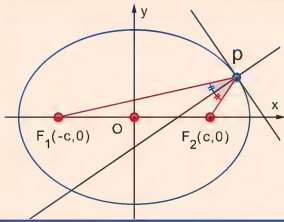
دوورترین خال که مانگ پێیدا ده‌روات $a + c \approx 405508 \text{ km}$ له چەقی زه‌وییه‌وه.

نزیکترین خال له مانگ پێیدا ده‌روات $a - c \approx 363292 \text{ km}$ دووره له چەقی زه‌وییه‌وه.

3. دووری تیشکۆی دووه‌می خولگه‌ی مانگ له چەقی زه‌وییه‌وه چهنده؟



سیفہتی تیشکدانہ وہی برگہی ناتہواو

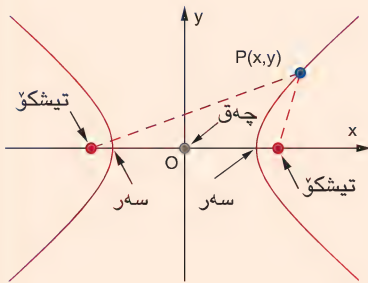


ئەستوونی سەر لیکەوتی برگہی ناتہواو لە خالی P کہ یەکیک لە خالەکانی برگەکە یە دەبێتە لەتکەری ئەو گۆشە ی پیکدیت بەو دوو راستەهێلە ی کہ بەو خالەدا و بە دوو تیشکۆیە کەیدا دەپۆن.

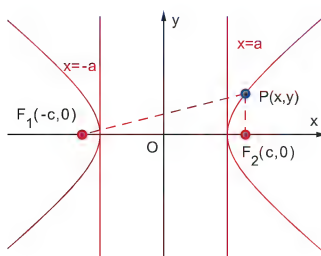
برگہی زیاد Hyperbola

پێناسە ی برگہی زیاد لە پێناسە ی برگہی ناتہواو دەچیت. برگہی ناتہواو بریتی یە لە کۆمەلە خالێک لە پروتەختیکدا کہ سەر جەمی دوو دورییە کە یان لە دوو خالی دیاریکراو بریکی نەگۆرە، ھەر وہا برگہی زیاد بریتی یە لە کۆمەلە خالێک لە پروتەختیکدا کہ بەھای پروتی جیاوازی نیوان دورییەکانیان لە دوو خالی دیاریکراو بریکی نەگۆرە.

برگہی زیاد



برگہی زیاد: کۆمەلە خالێکە لە پروتەختیکدا کہ بەھای پروتی جیاوازی دوو دورییەکانیان لە دوو خالی دیاریکراو بریکی نەگۆرە. ھەر یەک لەم دوو خالە پێی دەوتریت تیشکۆ بەو راستەهێلە ی پێیاندا دەپوات دەوتریت تەوہری تیشکۆیی و بەو راستەهێلە ی ھەردوو سەری برگەکە دەگەینیت پێی دەوتریت تەوہری راستی و ناوہ راستەکە ی دەبێتە چەقی برگە زیادەکە، ئەو راستەهێلە ی ئەستوونە لە سەر تەوہری تیشکۆیی پێی دەوتریت تەوہری ئاوہل (خەیاڵی)، برگہی زیاد بەوہ لە ھەردوو برگہی ناتہواو و ھاوتا جیا دەکرێتەوہ کہ پیکدیت لە دوو لقی ھاوجی بە پێی چەقەکە ی و تەوہری ئاوہلەکە ی.



ئەگەر دوو تیشکۆی برگەکە بریتی بێت لە دوو خالی $F_1(-c, 0)$ و $F_2(c, 0)$ ئەوا خالی $P(x, y)$ پاسادانی ئەو پەيوەندییە ی خواروہ دەکات.

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \pm 2a$$

بە سادە کردنی ئەو ھاوکێشە یە ودانانی ھەر یەک لە پرگەکان لە لایەک بە جیا و بە دوو جاکردنی ھاوکێشە کە پاشان ئەو پرگە ی دەمینیتەوہ لە لایەک بە تەنھا دایینی و دووبارە دوو جایی

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{c^2 - a^2} = 1$$

ھاوکێشە کە بکە ئەمە ی خواروہ دەست دەکەوێت.

ئەم ھاوکێشە یە لە ھاوکێشە ی برگہی ناتہواو دەچیت بەلام $a < c$ چونکە $2a$ کە مترە لە $2c$ چونکە جیاوازی نیوان دوو لای سیگۆشە ی PF_1F_2 دەنوینیت، لە لایەکی ترەو دەتوانیت دەربخە ی ئەگەر خالی $P(x, y)$ پاسادانی ھاوکێشە کە ی پێشوو بکات لە گەل $0 < a < c$ ئەوا پاسادانی $|PF_1 - PF_2| = 2a$ دەکات. ئەگەر b ناوینن پرگی دوو جایی موجهبی $c^2 - a^2 = b^2$ ئەوا $c^2 - a^2 = b^2$ ھاوکێشە کە دەبێتە $1 = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$ ئەوہش ھاوکێشە ی برگہی زیادە بە شیوہ ی سادە.

ئەگەر بەراوردى نىۋان دوو ھاۋكىشەى سادەى بېرگەى ناتەۋاۋ و زىادىكەىن دەرەكەۋىت كە لەيەكتەر دەچن، تەنھا لە دوو شت نەبىت

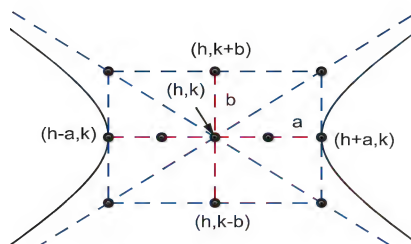
(يەكەم) ھاۋكىشەى بېرگەى ناتەۋاۋ نىشانەى كۆكردنەۋە + لەخۆدەگرىت، بەلام ھاۋكىشەى بېرگەى زىاد نىشانەى لىدەركردن - لەخۆدەگرىت.

(دوۋەم) $c^2 = a^2 + b^2$ لە ھاۋكىشەى بېرگەى ناتەۋاۋ، بەلام $c^2 = a^2 - b^2$ لە ھاۋكىشەى بېرگەى زىاد. لە ھاۋكىشەى بېرگەى زىاددا دەرەكەۋىت كە بېرگەى زىاد ھاۋجىيە لەگەل ھەردوۋ تەۋەرى پۆۋتەنەكان كە برىتەن لە تەۋەرى تىشكۆۋ تەۋەرى ئاۋەل و ھاۋجىيە لەگەل خالى بىنەرەت. بېرگەى زىاد تەۋەرى x لە دوو خالى $(-a, 0)$ و $(a, 0)$ دەرپىت كە دەبنە سەرى بېرگەى، لە كۆتايىدا دوو لىكەۋى بېرگەى زىاد لە سەرەكانىدا برىتەن لە دوو راستەھىلەى ئەستۈۋن لەگەل تەۋەرى تىشكۆۋى، بەلام كاتىك چەقى بېرگەى خالى بىنەرەت نەبىت، ئەۋا ھاۋكىشەى ئەم شىۋەى خوارەۋە ۋەردەگرىت.

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$$

كاتىك خالى (h, k) چەقى بېرگەى زىادەكە بىت.



دوۋ ھىلە دەرەكان

لە بېرگەى زىاددا دوو ھىلە دەرەكانى ھەيە كە برىتەن لە $y = k \pm \frac{b}{a}(x-h)$ كاتىك تەۋەرى تىشكۆۋى ئاسۋى بىت و $y = k \pm \frac{a}{b}(x-h)$ كاتىك

تەۋەرى تىشكۆۋى ئەستۈۋى بىت. دوو ھىلە دەرەكانە يارمەتيدەرن بۆ ۋىنەكىشانى بېرگەى زىادەكە ۋە ھەروەھا يارمەتيدەرن بۆ ئەۋەى بزائىت كە ھەردوۋ دەرەكانەكە لە چەقدا يەكتەردەپن و دەبنە دوو تىرەى ئەۋ لاكىشەى كە چەقەكەى ھەمان چەقى بېرگەى زىادەكەى ۋە دورىيەكانىان $2a$ و $2b$ دەبن.

ھاۋكىشەى بېرگەى زىاد

شىۋەى گشتى ھاۋكىشەى بېرگەى زىاد:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

ئەگەر تەۋەرى تىشكۆۋى ئاسۋى بىت.

$$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$$

ئەگەر تەۋەرى تىشكۆۋى ئەستۈۋى بىت.

لەم ھاۋكىشەىدا (h, k) چەقى بېرگەى زىادەكەى ۋە a نىۋەى تەۋەرى راستىە و $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ برىتەن لە دوۋرى نىۋان چەق و تىشكۆۋ.

پىكھاتەكانى تىرە بېرگەى زىاد ئەمانەن:

• سەرەكان: $(h \pm a, k)$ ئەگەر تەۋەرى تىشكۆۋى ئاسۋى بىت و $(h, k \pm a)$ ئەگەر ئەستۈۋى بىت.

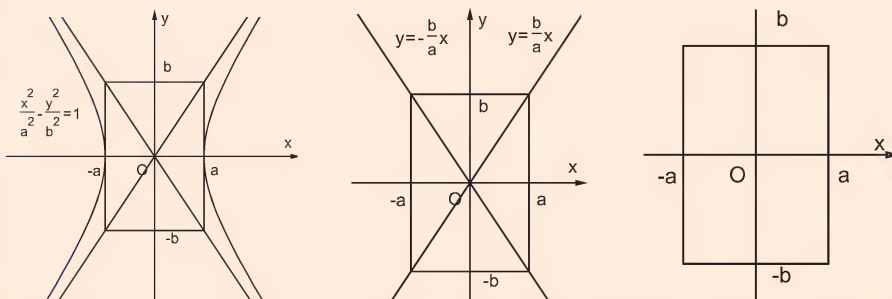
• تىشكۆكان: $(h \pm c, k)$ ئەگەر تەۋەرى تىشكۆۋى ئاسۋى بىت و $(h, k \pm c)$ ئەگەر ئەستۈۋى بىت.

• دەرەكان: $y = k \pm \frac{b}{a}(x-h)$ ئەگەر تەۋەرى تىشكۆۋى ئاسۋى بىت و $y = k \pm \frac{a}{b}(x-h)$ ئەگەر ئەستۈۋى بىت.

لاکیشی $2a \times 2b$ که چه که خالی بنه پته یارمه تیدره بۆ وینه کیسانی برگی ناته وای
 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ و برگی زیادی $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ تیبینی نهوت کرد که برگی ناته وای به ته وای
 ده که ویتته ناو لاکیشی که به لام برگی زیاده ته وای ده که ویتته ده ره وای لاکیشی که. چونکه
 هاو کیشی $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ده ده چیت $\frac{x^2}{a^2} \geq 1$ له مهش $x \geq +a$ یا $x \leq -a$ تیبینی بکه هه ره و
 برگی که دو لیکه و تیان له دو سه ره کانیندا هیه، که دو لای به رام بهر یه کترن له لاکیشی که دا.

چۆن وینه برگی زیاد ده کیشت

1. خاله کانی $(\pm a, 0)$ و $(0, \pm b)$ دیاریبکه و لاکیشی سنوورداو بهو خالانه وینه بکیش.
2. دوو هیله ده که ناره کانین به درژ کردنه وای دوو تیره ی لاکیشی که بکیش.
3. لاکیشی که و هیله ده که ناره کان به کار بهینه وه یارمه تیدره ی بۆ کیسانی برگی که.



دوو ده که ناره کان به کار بهینه بۆ وینه کیسانی برگی زیاد

4 نمونه

وینه برگی زیادی $4x^2 - y^2 = 16$ بکیش.

شیکار

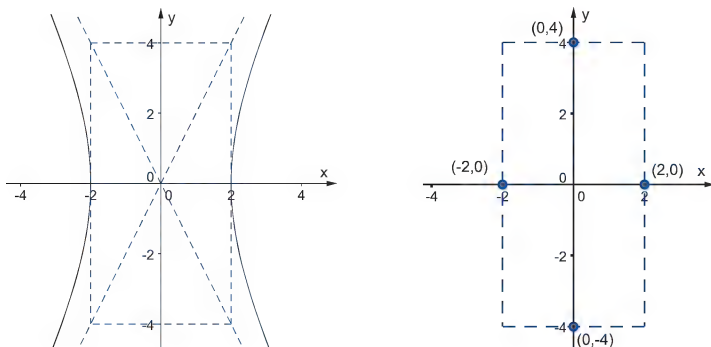
سه رتا هاو کیشی برگی زیاده که به شیوه ی گشتی بنووسه.

$$4x^2 - y^2 = 16 \Rightarrow \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{16} = 1$$

له مه وه بۆمان ده ده چیت که ته وری تیشکوی ئاسویییه و چه قی برگی که خالی بنه پته. دوو

دووری لاکیشی که بریتین له $2a = 4$ و $2b = 8$.

ئیتسا لاکیشی که دروست بکه.



دوو تیره ی لاکیشی که بکیشو درژیان بکه وه تا دوو هیله ده که ناره کانی برگی که ده ست
 بکه ویت. ئیتسا ده توانیت وینه برگی زیاده که به شیوه ی کی گونجاو بکیشیت.

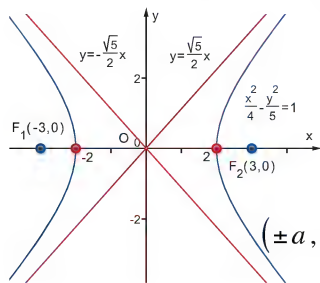
4. وینه برگی زیادی $y^2 - 4x^2 = 16$ بکیش.



دەتوانیت پیکهاتهکانی برځی زیاده بهکارهینانی هاوکیشی برځکه بدوژینهوه که بریتین له دووسەر و دوو تیشکو و دوو هیله دهرکه نارەکان پيش ئەمانه پيوسته بزانیتهوهری تیشکوئی ئاسوییە یان ستونییه.

نمونه 5

دوژینهوهی پیکهاتهکانی برځی زیاده، تیشکوئیەکانی لهسەر تهوهری x بیته



پیکهاتهکانی برځی زیاده $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$ بدوژنهوه.

شیکار

$$c^2 = a^2 + b^2 = 9, \quad b^2 = 5, \quad a^2 = 4$$

دووری نیوان چهق و تیشکو $c = 3$

دوو تیشکوئیە که $(\pm c, 0) = (\pm 3, 0)$ دوو سەرەکان $(\pm a, 0) = (\pm 2, 0)$

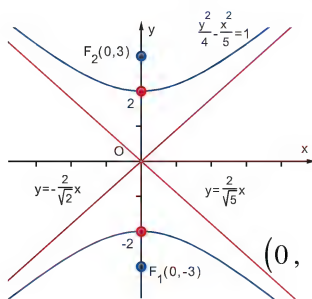
دوو هیله دهرکه نارەکان $y = \pm \frac{\sqrt{5}}{2}x$ چهق: $(0, 0)$

5. پیکهاتهکانی برځی زیاده $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{7} = 1$ بدوژنهوه.



نمونه 6

دوژینهوهی پیکهاتهکانی برځی زیاده، تیشکوئیەکانی لهسەر تهوهری y بیته.



پیکهاتهکانی ئەم برځی زیاده بدوژنهوه $\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{5} = 1$

شیکار

$$c^2 = a^2 + b^2 = 9, \quad b^2 = 5, \quad a^2 = 4$$

دووری نیوان چهق و تیشکو $c = 3$

دوو تیشکوئیە که $(0, \pm c) = (0, \pm 3)$ دوو سەرەکان $(0, \pm a) = (0, \pm 2)$

هیله دهرکه نارەکان $y = \pm \frac{2}{\sqrt{5}}x$ چهق: $(0, 0)$

6. پیکهاتهکانی برځی زیاده $\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{7} = 1$ بدوژنهوه.

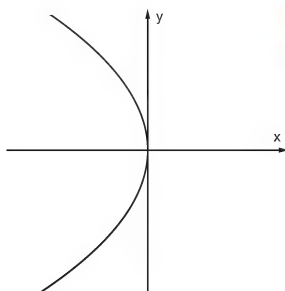


راهیانی

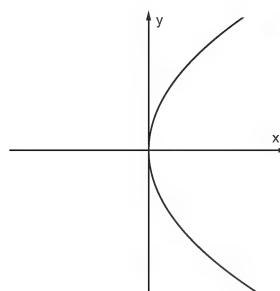
1-6

له راهیانی 1 تا 4 بهراوردی برځه هاوتاکه بکه لهگهڵ ئەو هاوکیشیەیهی که دەنیوینیت.

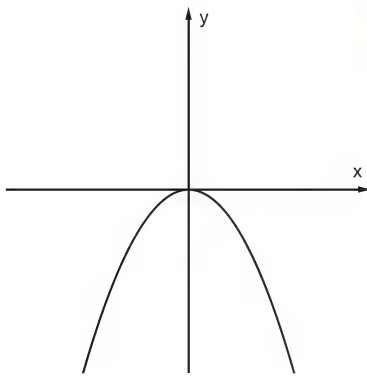
$$y^2 = -4x, \quad y^2 = 8x, \quad x^2 = -6y, \quad x^2 = 2y$$



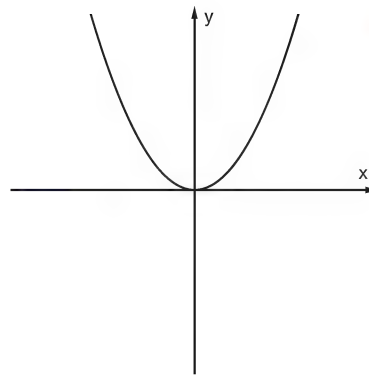
2



1



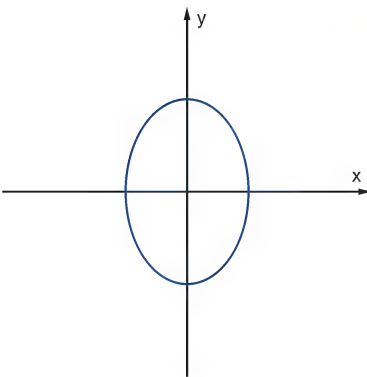
4



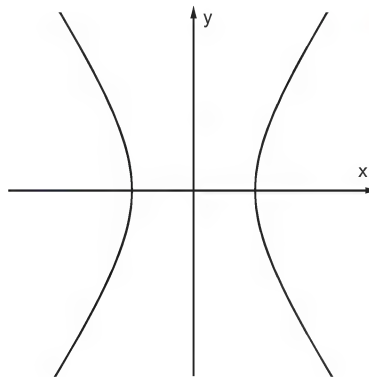
3

له راهینانی 5 تا 8 برکه قوچهکیهکه بهو هاوکیشهی دینوینیت بیهستهوه.

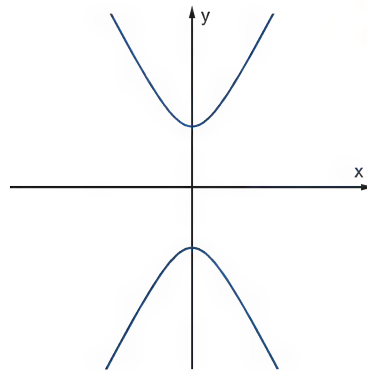
$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1, \quad \frac{y^2}{4} - x^2 = 1, \quad \frac{x^2}{2} + y^2 = 1, \quad \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$$



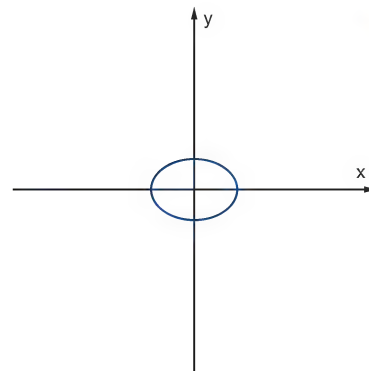
6



5



8



7

له راهینانی 9 تا 13 تیشکو و سهرو دهلیلی ئەم برکه هاوتایانه بدۆزهوه، وینهکانیان بکیشه.

$$(x+3)+(y-2)^2=0 \quad \text{11}$$

$$y^2=-6x \quad \text{10}$$

$$y^2=12x \quad \text{9}$$

$$y^2+4y+8x-12=0 \quad \text{13}$$

$$x^2+4x+4y-4=0 \quad \text{12}$$

له راهینانی 14 تاكو 17 هاوکیشهی ئەو برکه هاوتایانه بدۆزهوه.

$$y=-2 \quad \text{سهر: } (0,4) \quad \text{دهلیل: } y=-2 \quad \text{15}$$

$$(1,2) \quad \text{سهر: } (3,2) \quad \text{تیشکو: } (1,2) \quad \text{14}$$

$$(2,4) \quad \text{سهر: } (2,4) \quad \text{یهکتربرینه ئاسۆییهکان} \quad \text{17}$$

$$(2,2) \quad \text{دهلیل: } x=-2 \quad \text{تیشکو: } (2,2) \quad \text{16}$$

$$(4,0), (0,0) \text{ و}$$

له پرسپاری 18 تا 21 پیکهاتهکانی ئەم برپگه ناتەواوانه بدۆزەوه و وینەکانیان بکێشه.

$$\frac{(x-1)^2}{9} + \frac{(y-5)^2}{25} = 1 \quad 19$$

$$5x^2 + 7y^2 = 70 \quad 18$$

$$9x^2 + 25y^2 - 36x + 150y + 36 = 0 \quad 21$$

$$9x^2 + 4y^2 + 36x - 24y + 36 = 0 \quad 20$$

له پرسپاری 22 تا 25 هاوکیشهی ئەم برپگه ناتەواوانه بدۆزەوه.

$$\text{چەق: } (0, 0) \text{ تیشکۆ: } (2, 0) \text{ سەر: } (3, 0) \quad 22$$

$$\text{سەرەکانی } (3, 1) \text{ و } (3, 9), \text{ تەوهری بچووک: } 6 \quad 23$$

$$\text{تیشکۆیهک: } (0, \pm 5) \text{ تەوهری گەورە } 14 \quad 24$$

$$\text{چەق: } (1, 2) \text{ تەوهری تیشکۆیی ستوونییه بە دوو خالی } (1, 6) \text{ و } (3, 2) \text{ دا دەروات.} \quad 25$$

له پرسپاری 26 تا 29 پیکهاتهکانی ئەم برپگه زیادانه بدۆزەوه وینەکانیان بکێشه.

$$\frac{(x-1)^2}{4} - \frac{(y+2)^2}{1} = 1 \quad 27$$

$$y^2 - \frac{x^2}{4} = 1 \quad 26$$

$$x^2 - 9y^2 + 2x - 54y - 81 = 0 \quad 29$$

$$9x^2 - y^2 - 36x - 6y + 18 = 0 \quad 28$$

له پرسپاری 30 تا 33 هاوکیشهی ئەم برپگه زیادانه بدۆزەوه.

$$\text{دوو سەرەکانی } (\pm 1, 0) \text{ دوو دەرکەنارەکان } y = \pm 3x \quad 30$$

$$\text{دوو سەرەکانی } (2, \pm 3) \text{ بە خالی } (0, 5) \text{ دا دەروات.} \quad 31$$

$$\text{چەق: } (0, 0) \text{ تیشکۆ: } (0, 4), \text{ سەر: } (0, 2). \quad 32$$

$$\text{دوو سەرەکانی } (2, \pm 3) \text{ دوو تیشکۆ: } (2, \pm 5). \quad 33$$

دەربارەى چەمکەکان

$$\text{پیناسەى هەریەک لە برپگەى هاوتا و برپگەى ناتەواو و برپگەى زیادبکە.} \quad 34$$

$$\text{هاوکیشهى ئەو برپگە زیاد کە سەرەکەى خالی } (h, k) \text{ بیئت بەشیوەى گشتی بنووسە.} \quad 35$$

$$\text{هاوکیشهى ئەو برپگە ناتەواوەى کە چەقەکەى } (h, k) \text{ بیئت بەشیوەى گشتی بنووسە.} \quad 36$$

$$\text{هاوکیشهى ئەو برپگە زیادەى کە چەقەکەى } (h, k) \text{ بیئت بەشیوەى گشتی بنووسە.} \quad 37$$

$$\text{هاوکیشهى دوو هێلە دەرکەنارەکانى ئەو برپگە زیادەى چەقەکەى } (h, k) \text{ بیئت بدۆزەوه.} \quad 38$$

$$\text{بەشیوازی خۆت (أسلوب) سیفەتى تیشکدانەوهى برپگەى هاوتا بنووسە.} \quad 39$$

$$\text{برپگە هاوتای } y^2 = 8x \text{ دوو یەکە بۆ خوارەوه و یەک یەکە بۆ لای راست ڤاکیشرا بۆ بەدەستەینانى} \quad 40$$

$$\text{برپگەى هاوتای } (y+2)^2 = 8(x-1).$$

$$\text{[ا] سەرى برپگە هاوتا بنەرەتییهکە و پۆوتانى تیشکۆو هاوکیشهى دەلیلهکەى بدۆزەوه.}$$

$$\text{[ب] سەرى برپگە هاوتا نووییەکە و پۆوتانى تیشکۆ و هاوکیشهى دەلیلهکەى بدۆزەوه.}$$

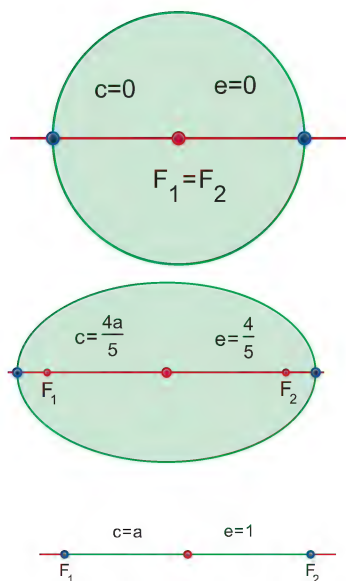
$$\text{[ج] وینەى هەردوو برپگەکە (بنەرەت و نووییەکە) بکێشه.}$$

پۆلینکردنی برگه قوچهکیهکان

Classifying Conics

ئامانجهکان

- برگه قوچهکیهکان به پۆیی جیاوازی چهقی پۆلین دهکات.
- پیناسه ی برگه قوچهکیهکان به تیشکو و دهلیل پیناسه دهکات.



به زیادبونی بهای c ، برگه ناتهواو له بازنه دهگۆریت بۆ پارچه راستههیل

هر برگهیهکی قوچهکی به ژمارهیهک ده به ستریت پۆی دهوتریت (جیاوازی چهقی) بهای جیاوازی چهقی جۆری برگهکه دیاریدهکات، ئایا برگهکه بازنهیه یان هاوتایه یان ناتهواوه یان زیاده. ههروهها پیکهاتهکانی له ههردوو باری برگه ناتهواو و برگه ی زیاده دیاریدهکات. به برگه ناتهواو دهستپیدهکین ههچنده دووری نیوان چهق و یهک له تیشکوکانی واته c ده رناکهوئیت له هاوکیشهکی.

$$(a > b) \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

له بهرئوه به بهکارهینانی $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ ده دۆزینهوه ئهگهر بهای a نهگۆریت و c بگۆریت له ماوهی $[0, a]$ ئهوا شیوهی برگهکه دهگۆریت وهک له وینهی بهرامبهر ده ردهکهوئیت. برگهکه ده بیته بازنه کاتیك $c = 0$ ($a = b$) و درێژده بیتهوه به زیادکردنی بهای c تا وایلیدیته ده بیته پارچه راستههیل کاتیك $c = a$.

پێژهی c بۆ a بۆ باسکردنی شیوه جیاوازهکانی برگه ناتهواو بهکاردهینریت ئهم پێژیهش بریتیه له جیاوازی چهقی.

زاراوهکان

Vocabulary

Eccentricity	جیاوازی چهقی
Focus	تیشکو
Directrix	دهلیل

جیاوازی چهقی

جیاوازی چهقی برگه ناتهواوی $(a > b) \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ بریتیه له $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$

1 نمونه

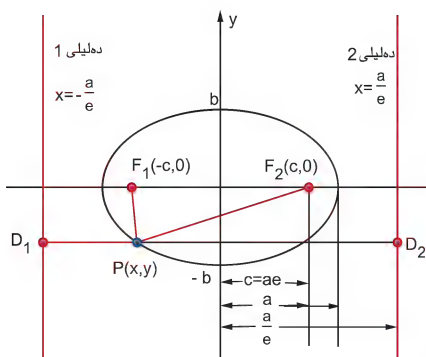
دۆزینهوهی سه رهکانی برگه ناتهواو پۆتانی سه رهکانی برگه ناتهواویک بدۆزهوه، که جیاوازی چهقیهکی 0.8 و تیشکوکانی $(0, \pm 7)$ بیت.

شیکار

پۆتانی دوو سه رهکانی $(0, \pm a)$ له بهرئوهی $e = \frac{c}{a}$ ئهوا $a = \frac{c}{e} = \frac{7}{0.8} = 8.75$ که واته پۆتانی دوو سه رهکانی ده بنه $(0, \pm 8.75)$.

1. پۆتانی سه رهکانی برگه ناتهواویک که جیاوازی چهقیهکی 0.75 و دوو تیشکوکانی $(0, \pm 6.5)$ بیت بدۆزهوه.





برگهی هاوتا يەك تیشکۆ و يەك دەلێلی هەيه، بەلام
برگهی ناتەواو دوو دەلێل و دوو تیشکۆی هەيه. دوو
دەلێلەكەى بریتين لە دوو راستەهێلى ئەستوون لەگەڵ
تەوهرى تیشکۆی و لە دوورى $\pm \frac{a}{e}$ لەچەقەوه دەیانپرێت x
هەر خاڵێكى وەك P لە خاڵەكانى برگهى هاوتا ئەم
سيفەتەى هەيه $PF = 1 \times PD$ كە D نزیكترین خاڵە لە
خاڵەكانى دەلێل لە P.

ئەم پەيوەندىيە لەبرگهى ناتەواو دا دەبێتە $PF_1 = e \times PD_1$
 $PF_2 = e \times PD_2$ كاتێك e جیاوازی چەقى برگهى ناتەواو كە تیشکۆكانى F_1, F_2, D_1, D_2 دوو خاڵى
سەر دوو دەلێلەكەن و نزیكترین خاڵن لە P.

لە هەردوو هاوكێشەى $PF_1 = e \times PD_1$ و $PF_2 = e \times PD_2$ پێویستە تیشکۆ و دەلێل لەهەمان دیوى
چەقى برگه ناتەواو كە بن.
دەلێلى $x = -\frac{a}{e}$ لەگەڵ تیشکۆى F_1 و دەلێلى $x = \frac{a}{e}$ لەگەڵ تیشکۆى F_2 بەكاربهێنە.

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a} \text{ و } (a > b) \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

سەرنجبدە جیاوازی چەقى برگهى ناتەواو و زیاد دەكاتە پرژەى دوورى نێوان دوو تیشکۆ و دوورى
نێوان هەردوو سەرەكەى چونكە $e = \frac{c}{a} = \frac{2c}{2a}$

$$\frac{\text{دوورى نێوان دوو تیشکۆ}}{\text{دوورى نێوان دوو سەر}} = \text{جیاوازی چەقى}$$

دوورى نێوان دوو تیشکۆى برگهى ناتەواو لە دوورى نێوان دوو سەرەكەى بچووكتەرە بۆیە، جیاوازی
چەقى لە 1 كەمتر دەبێت، بەلام دوورى نێوان دوو تیشکۆى برگهى زیاد لە دوورى نێوان دوو
سەرەكەى گەورەترە، بۆیە جیاوازی چەقى لە 1 گەورەترە.

دۆزینهوهى جیاوازی چەقى

2 نموونه

جیاوازی چەقى بۆ برگهى زیادى $9x^2 - 16y^2 = 144$ بدۆزەوه.

شیکار

سەرەتا هاوكێشەكە بەشیۆهێ گشتى بنوسە.

$$9x^2 - 16y^2 = 144 \Rightarrow \frac{9x^2}{144} - \frac{16y^2}{144} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$$

لەوهوه دەردهچێت $b = 3, a = 4$.

$$e = \frac{c}{a} = \frac{5}{4} \text{ و } c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5$$

2. جیاوازی چەقى بۆ برگهى زیادى $16x^2 - 9y^2 = 144$ بدۆزەوه.



وځ له برځه ناته واوډا و هه روه ها له برځه زيات دا دوو راسته هيلی $x = \pm \frac{a}{e}$ پوځی دوو راسته هيلی د لیل د بڼین و $PF_1 = e \times PD_1$ و $PF_2 = e \times PD_2$ که P خالیکی برځه و F_1 و F_2 دوو تیشکوکانیه تی کاتیځ D_1 و D_2 نزیکترین دوو خالی سهر د لیله کانن له P . وه هه روه ها له باره ی هاوکیشه ی برځه ناته واو، دتوانین پرونیکه پنه وه که هه ردو د لیله که بریتین له: $x = \pm \frac{a}{e}$.

پیناسه ی یه کگرتووی برځه قوچه کییه کان

بو ته واوکردنی شیوه دهر باره ی برځه قوچه کییه کان، جیاوازی چه قی برځه ی هاوتا به $e = 1$ پیناسه ده که ی.

جیاوازی چه قی برځه ی هاوتا

جیاوازی چه قی له برځه ی هاوتا بریتیه $e = 1$.

نه گهر پید اچوونه وه یه ک بو نه و په یوه ندیانه ی که سی برځه قوچه کییه کان هیا نه بکه یت دتوانیت پیناسه یه کی یه کگرتووی بدینی به به کار هینانی تیشکو و د لیل و جیاوازی چه قی.

پیناسه ی یه کگرتووی برځه قوچه کییه کان

نه گهر F خالیکی سهر پروتخت بیټ و d راسته هیلک بیټ له راسته هیلکانه ی e ژماره یه کی راستی سالب نه بیټ، نه و نه و برځه قوچه کییه ی تیشکو یه که ی F و د لیله که ی d و جیاوازی چه قی e بیټ بریتیه له کو مه له خالیک P له پروتختیځدا که پاسادانی $PF = e \times PD$ یا $\frac{PF}{PD} = e$ ده که ن.

برځه ی قوچه کی ده بیټه.

- برځه ی هاوتا کاتیځ $e = 1$.
- برځه ی ناته واو کاتیځ $e < 1$.
- برځه ی زیاد کاتیځ $e > 1$.

هاوکیشه ی $e = \frac{PF}{PD}$ به کار هینانی ئاسان نییه، چونکه پووتانه کانن تیدانییه نه گهر هه ولیدیت بیگوپیت به به کار هینانی پووتانه کان چهند نه نجامیکی جیاوازی بو دهر دچیت به پیی شیوه کانن و به های e به لام له سیستمی پووتانه کانن تر که سیستمی جه مسهر ییه کرداره که زور ئاسانه، له بهر نه وه زانایانی فله کناس و بو شایي ئاسمان زیاتر له 300 سال بهر له ئیستا به کاریانده هیئین.

نه گهر تیشکو د لیلی ناوه لی برځه ی زیاد زانراو بیټ و چه که که ی خالی بنه رت و تیشکو ی له سهر ته وهره ی x بیټ. دتوانیت به های جیاوازی چه قی e دستبکه ویټ پاشانیش هاوکیشه یه کی ته وهره ییت له هاوکیشه ی $PF = e \times PD$ دستدکه ویټ وځ له نمونه یه دا دهر دکه ویټ، دتوانین هه مانشت بکه ین بو هاکیشه ی برځه ی ناته واو چه که که ی خالی بنه رت و تیشکو یه که ی له سهر ته وهره ی x بیټ.

نمونه 3 به کار هینانی تیشکو د لیل

هاوکیشه ی ته وهره یی نه و برځه زیاده بدوژدوه که چه که که ی خالی بنه رت و تیشکو یه کیان (3, 0) و د لیله که ی راسته هیلک $x = 1$ بیټ.

شیکار

له بهر نه وه ی چه که که ی خالی بنه رته و تیشکو یه که ش (3, 0) نه و $c = 3$ ، له لایه کی تره وه هاوکیشه ی د لیل $x = \frac{a}{e} = 1$ نه مه ش a مان دداتی، له کو تاید $e = \frac{c}{a} = 3$ و به و ش $e^2 = 3$ له هه مو نه مانه دهر دچیت $e = \sqrt{3}$.

له لایه کی ترهوه دتوانیت په یوهندی به تهوهری بگوریت بؤ $PF = e \times PD$.

$$PF = e \times PD$$

$$\sqrt{(x-3)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{3}|x-1|$$

$$x^2 - 6x + 9 + y^2 = 3(x^2 - 2x + 1)$$

$$2x^2 - y^2 = 6$$

$$\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{6} = 1$$

3. هاوکښه تهوهری نهو برکه ناتهواو بدوزهوه که چهقه که خالی بنه رت و تیشکو په کی (3, 0) و دهلیله که راسته هیلی $x = 4$ بیت،



راهینان

2-6

له پرسپاری 1 تا 4 جیاوازی چهقی و دوو تیشکو و دوو دهلیلی برکه ناتهواوه که بدوزهوه.

1 $16x^2 + 25y^2 = 400$ 2 $2x^2 + y^2 = 2$ 3 $3x^2 + 2y^2 = 6$ 4 $6x^2 + 9y^2 = 54$

له دوو پرسپاری 5 و 6 دا جیاوازی چهقی پاشان هاوکښه گشتی برکه ناتهواو بدوزهوه که چهقه که خالی بنه رته به زانینی تیشکو و دهلیل.

5 تیشکو: $(\sqrt{5}, 0)$ ، دهلیل $x = \frac{9}{\sqrt{5}}$ 6 تیشکو: $(-4, 0)$ ، دهلیل $x = -16$

7 وینه برکه په کی ناتهواو بکښه که جیاوازی چهقی بکاته $\frac{4}{5}$ ریگای وینه کښانه که پرونبکه وه.

8 سهرمکانی برکه په کی ناتهواو بریتییه له $(1, 1)$ ، $(3, 4)$ ، $(1, 7)$ ، $(-1, 4)$ وینه که بکښه و هاوکښه گشتیه که بدوزهوه، جیاوازی چهقی و تیشکوکانی و دهلیلهکانی بدوزهوه.

9 هاوکښه برکه په کی ناتهواو بدوزهوه که جیاوازی چهقییه که $\frac{2}{3}$ و یه کی له تیشکوکانی $(4, 0)$ و دهلیله که $x = 9$ بیت.

له پرسپاری 10 تا 13 جیاوازی چهقی و تیشکوکانی و دهلیلهکانی برکه زیاده که بدوزهوه.

10 $9x^2 - 16y^2 = 144$ 11 $y^2 - x^2 = 8$ 12 $8x^2 - 2y^2 = 16$ 13 $8y^2 - 2x^2 = 16$

له دوو پرسپاری 14 و 15 دا هاوکښه گشتی برکه زیاده که به شیوه پیوانه یی بدوزهوه به زانینی جیاوازی چهقی و هردوو سهرمکانی یان هردوو تیشکوکانی.

14 جیاوازی چهقی 3: دوو سهر ستونیهکانی $(0, \pm 1)$.

15 جیاوازی چهقی 3: تیشکوکان $(\pm 3, 0)$.

16 هاوکښه نهو برکه زیاده بدوزهوه که جیاوازی چهقییه که $\frac{3}{2}$ و یه که له تیشکوکانی $(1, -3)$ و دهلیلی $y = 4$.

17 بههیهکانی a و b و c بدوزهوه کاتیک برکه ناتهواوی $4x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ به خالی $(-1, 2)$ دپوات و له تهوهری x دهکه ویت له خالی بنه رته، بههای جیاوازی چهقی برکه که چنده؟

18 هاوکښه نهو برکه زیاده بدوزهوه که پیکهاتوه لهو خالانه یی پروتهختیک که بههای پروتی جیاوازی نیوان دوو دوریهکانیان له دوو خالی $(2, 2)$ و $(10, 2)$ دهکاته بههای نهگور 6.

تاقىکردنەۋى نىۋەى بەش

1-6 برگە قوچەككەكان

1 پۇتۇتەنى تىشكۇ و سەرى برگە ھاۋكېشەى دەلىلى برگە ھاۋتايەكە بدۆزەۋە، پاشان وئەكەى بېكېشە.

$$y^2 - 4x = 0 \quad \text{a)} \quad x = 2(1 - y^2) \quad \text{b)} \quad x^2 - 2x + 2y + 3 = 0 \quad \text{c)}$$

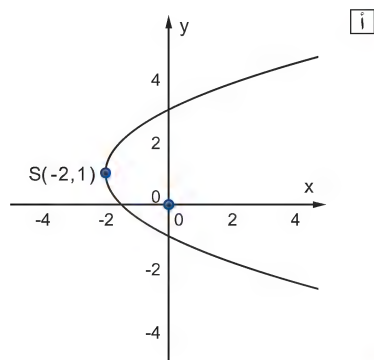
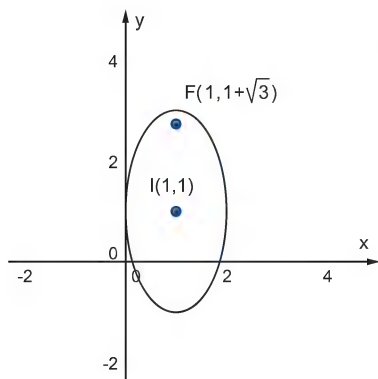
2 پۇتۇتەنى چەق و دوو تىشكۇ و جىاۋازى چەقى برگە ناتەۋاۋەكە بدۆزەۋە، پاشان وئەكەى بېكېشە.

$$x^2 + 4y^2 = 1 \quad \text{a)} \quad 4x^2 + y^2 - 8x - 12 = 0 \quad \text{b)}$$

3 پۇتۇتەنى چەق و دوو تىشكۇ و درىژى تەۋەرى گەۋرەى برگە زىادەكە بدۆزەۋە، پاشان وئەكەى بېكېشە.

$$x^2 - y^2 = 4 \quad \text{a)} \quad 4(y - 1)^2 - x^2 = 1 \quad \text{b)}$$

4 ھاۋكېشەى ئەم برگە قوچەككەكانە بەشئۆەى گشتى بنۋوسە.



5 ھاۋكېشەى برگە ناتەۋاۋىك بەشئۆەى گشتى بدۆزەۋە، كاتىك چەقەكەى $I(3, 1)$ يەككە لەسەرەكانى $A(6, 1)$ و

يەككە لە دەلىلەكانى راستەھىلى $x = 7$ بىت.

6 ھاۋكېشەى برگە زىادىك بەشئۆەى گشتى بدۆزەۋە، كاتىك چەقەكەى خالى بنەرەت و يەككە لەسەرەكانى $A(3, 0)$

و جىاۋازى چەقى $\frac{5}{3}$ بىت.

2-6 پۇلئىنكردنى برگە قوچەككەكان

7 M خالىكە لە پروتەختى پۇتۇتەندا بەپىي ئەم پەيۋەندىيە $|MA - MB| = 1$ دەجۈلئەت، كاتىك $A(0, -1)$ ، $B(0, 3)$

بىت، جۇرى چەماۋەى جۈلەى خالەكە دىارىبەكە ھاۋكېشەكەى بدۆزەۋە.

8 خالى M لە پروتەختى پۇتۇتەندا دەجۈلئەت بەمەرچىك دوورى نىۋانى و خالى بنەرەت دەكاتە (دوو سىيەكى)

دوورى نىۋانى و راستەھىلى $x = \frac{5}{2}$. جۇرى چەماۋەى جۈلەى خالەكە دىارىبەكە و ھاۋكېشەكەى لەسەر شىۋەى

گشتى بنۋوسە.

هاوكيشه دووجايهكان به دوو گۆپاو

Quadratic Equations in 2 Variables

3-6

چەماوھ دووجاكان

ئامانجەكان

- لە پادەى يەكترېرېن دەرياز دەبىي بە سورانى تەوھرى پۆوتانەكان.
- نواندە پوونكردەوھىيە جياوازەكانى ھاوكيشەيەكى دووجاى دوو گۆپاو دياريدەكات.
- تاقىكردەوھى جياكەرەوھ بەكاردەھيئەت بۆ پۆلىكردن ھاوكيشەى دووجاى بە دوو گۆپاو.

زاراوەكان

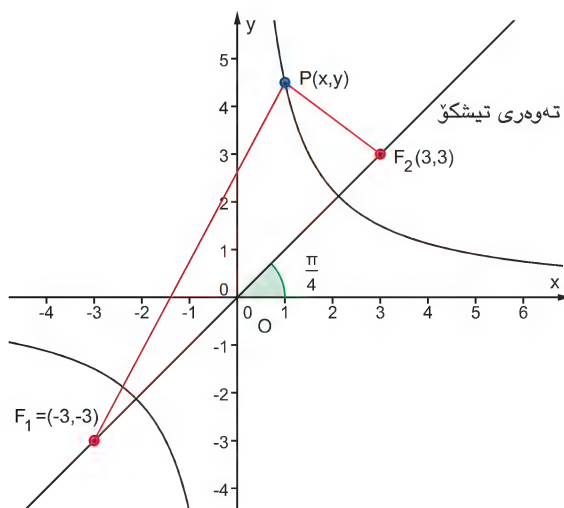
Vocabulary

چەماوھ دووجاكان
Quadratic Curves
جياكەرەوھ
Discriminant

لەم وانەيدا فيرى بابەتيكى زۆر سەرسورھيەنەر دەبىت لە ئەندازەى پۆوتانەكان، كە برىتيە لە نواندن ۛ پوونكردەوھى ھاوكيشەيەكى دووجاى دوو گۆپاو كە بەشيۆەى $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ دەنووسىت، كاتيک A و B و C و D و E و F ژمارەى پاستين ھەمويان ناكەنە سفر، بەزۆرى ئەم چەماوھىە برگەى قوچەكيە، بەلام جار ھەيە لەبارى شيۆاوى (خاليك يان دوو پاستەھيلى تەريپ يان كۆمەلەى بەتال) دەبىت. ئەو چەماوانەى ھاوكيشەى دووجاى دوو گۆپاو دەنوین بە چەماوھ دووجاكان ناسراون، بى گومان دەريارەى پادەى Bxy دەپرسىت، كە پيشتر لە ھاوكيشەى برگە قوچەكيەكان بەرچاوت نەكەوتووە بەو پادەيە دەوترىت پادەى يەكترېرېن. نەبوونى پادەى يەكترېرېن بۆ ئەو دەگەرپتەوھ كە تەوھەكانى برگە قوچەكيەكان ھەردەم بە تەوھرى پۆوتانەكان تەريپ بوون، بۆ ئەوھى ببينىت چى پرودەدات و كاتيک تەوھەكان بەتەوھرى پۆوتانەكان تەريپ نابىت، ھاوكيشەى برگەى زياد لەبارى $a = 3$ و تيشكۆكان $F_1(-3, -3)$ ، $F_2(3, 3)$ دەنووسين. ئەو برگە زيادە برىتيە لە كۆمەلە خاليكى $P(x, y)$ كە پاسادانى $|PF_1 - PF_2| = 2a = 2(3) = 6$ دەكات بەشيۆەى پۆوتانەكان دەكاتە.

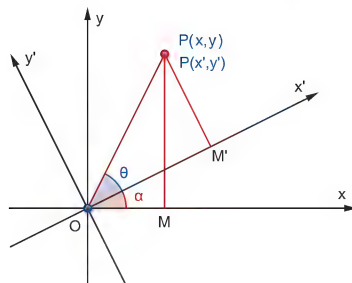
$$\sqrt{(x+3)^2 + (y+3)^2} - \sqrt{(x-3)^2 + (y-3)^2} = \pm 6$$

ئەگەر يەككە لە پەگەكانت جياكردەوھ بۆ لايەك بەتەنيا و دووجات كرد، پاشان ئەو پەگەى ماوھ لەلایەك بەتەنيات دانائو لەنوئيەوھ دووجات كرد و لە دواى كورتركردەوھ $2xy = 9$ دەستدەكەويىت.



دوو ھيلى دەركەنارەكانى برگە زيادەكە بەپيى ھاوكيشە نوئيەكە ھەردوو تەوھرى پۆوتانەكانە، بەلام تەوھرى تيشكۆ لەگەل ئاراستەى مۇجەبى تەوھرى x گۆشەيەك پيكدەھيئەت، پيوانەكەى $\frac{\pi}{4}$ پادبان (بازنەيى)

سوپراندنی دوو تەوهری پۆتانهکان بۆ رزگاربیون له پادهی Bxy



بۆ رزگاربیون له پادهی یهکتربیرین، ئهوانه ی له بواری بیرکاری کاردهکن ههڵدهستن به سوپانی تهرهکانی پۆتان بهدووری خالی بنهپهتا بۆ دهستکهوتنی پروتهختیکی نوێ بۆ ئهوهی هاوکیشه ی چهماوهکه هیچ پادهیهکی یهکتربیرینی تیدا نه مینیت. بهپێی وینه ی بهرامبهر دهتوانیت بنوسیت:

$$x = OM = OP \cos(\theta + \alpha) = OP \cos \theta \cos \alpha - OP \sin \theta \sin \alpha$$

$$y = PM = OP \sin(\theta + \alpha) = OP \cos \theta \sin \alpha + OP \sin \theta \cos \alpha$$

له بهر ئهوهی $OP \cos \theta = OM' = x'$ و $OP \sin \theta = M'P = y'$

$$\begin{cases} x = x' \cos \alpha - y' \sin \alpha \\ y = x' \sin \alpha + y' \cos \alpha \end{cases}$$

دهتوانین پهيوهندی سهروه به شێوهی ریزکراوهکان دهبرین و هه له پۆلی یازدهم فیۆی بویت.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

رزگاربیون له پادهی یهکتربیرین

1 نموونه

هاوکیشه ی برگی زیادی $2xy = 9$ له پروتهختی پۆتانهکان که له ئهجامی سوپانی تهری پۆتانهکان دهردهچیت بهدووری خالی بنهپهت بهگۆشه ی $\frac{\pi}{4}$ دا بدۆزهوه.

شیکار

$$\begin{aligned} \text{له } 2xy = 9 \text{ و } x = \frac{x' - y'}{\sqrt{2}} \text{ و } y = \frac{x' + y'}{\sqrt{2}} \text{ به له جیاتیدانی } x \text{ و } y \text{ له } 2xy = 9 \\ \text{دهردهچیت که: } 2 \left(\frac{x' - y'}{\sqrt{2}} \right) \left(\frac{x' + y'}{\sqrt{2}} \right) = 9 \end{aligned}$$

$$\text{یان } 1 = \frac{x'^2}{9} - \frac{y'^2}{9}$$

1. هاوکیشه ی برگی زیادی $xy = 1$ که له ئهجامی سوپانی تهری پۆتانهکان دهردهچیت بهدووری خالی بنهپهت بهگۆشه ی $\frac{\pi}{4}$ رادیان بدۆزهوه.



ئهگهر بگهڕینهوه بۆ هاوکیشه ی دووجای دوو گۆراو و لهجیات ی و بههایهکانی α و x' و y' دانا ئهوا ئه م شێوهی خوارهومان له هاوکیشه که دهستدهکهوین له پروتهخته نوێیهکی پۆتانهکان.

$$A'x'^2 + B'x'y' + C'y'^2 + D'x' + E'y' + F' = 0$$

هاوکۆکه ی نوێیهکان و کۆنهکان بهم پهيوهندییهی خوارهوه بهیهکهوه دهبهستریین.

$$A' = A \cos^2 \alpha + B \cos \alpha \sin \alpha + C \sin^2 \alpha$$

$$B' = B \cos 2\alpha + (C - A) \sin 2\alpha$$

$$C' = A \sin^2 \alpha - B \sin \alpha \cos \alpha + C \cos^2 \alpha$$

$$D' = D \cos \alpha + E \sin \alpha$$

$$E' = -D \sin \alpha + E \cos \alpha$$

$$F' = F$$

بۇ رزگار بونون لە پادەى $B'x'y'$ ئەوئەندە بەسە كە α ھەلبريٲ كاتىك $B' = 0$ ئەمەى خوارەوئەمان دەستدەكەوٲت.

دياريكردى گۆشەى سووپان α

• ئەگەر $A = C$ ، $\alpha = \frac{\pi}{4}$ ھەلبريٲ ئەوا $B' = B \cos 2\alpha = B \cos \frac{\pi}{2} = 0$

• ئەگەر $A \neq C$ ، α ھەلبريٲ بە مەرجىك $\tan 2\alpha = \frac{B}{A-C}$

نمونه 2

رزگار بونون لە پادەى يەكتربرين

گۆشەى سووپانەوئەى α بدۆزەو بەمەرجىك ھاوگىشەى $2x^2 + \sqrt{3}xy + y^2 - 10 = 0$ لە پووتەختى پۆتانی نوٲدا پادەى يەكتربرينى تٲدانەبٲت، ھاوگىشەى چەماوئەكە لە پووتەختى پۆتانی نوٲدا بدۆزەو.

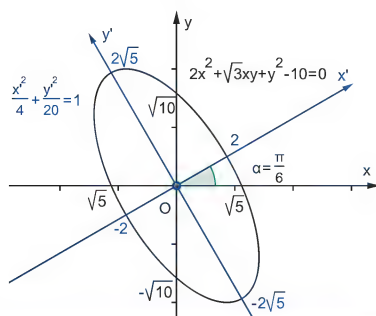
شىكار

$C = 1, B = \sqrt{3}, A = 2$ بە لە جياتيدانان $\tan 2\alpha = \frac{B}{A-C} = \frac{\sqrt{3}}{2-1} = \sqrt{3}$

دەردەچٲت $2\alpha = \frac{\pi}{3}$ و $\alpha = \frac{\pi}{6}$ ، ھاوگۆلگەى ھاوگىشەى چەماوئەكە لە پووتەختى پۆتانی نوٲدا ئەمەى $2\alpha = \frac{\pi}{3}$ و $\alpha = \frac{\pi}{6}$ و $A' = \frac{5}{2}$ و $B' = 0$ و $C' = \frac{1}{2}$ و $D' = E' = 0$ و $F' = -10$ ئەمەش ئەوئەمان

دەداتى: $5(x')^2 + \frac{1}{2}(y')^2 - 10 = 0$

ئەم چەماوئەى ھى برگەى ناتەواو، تيشكۆكانى دەكەونە سەر تەوئەرى y' يان $\frac{(x')^2}{4} + \frac{(y')^2}{20} = 1$



2. گۆشەى سووپانەوئەى α بدۆزەو كاتىك ھاوگىشەى چەماوئەى

$xy - x - y + 1 = 0$ لە پووتەختى پۆتانی نوٲدا پادەى يەكتربرينى

تٲدانەبٲت و ھاوگىشەى چەماوئەكە لە پووتەختى پۆتانی نوٲدا بدۆزەو.



نواندى پروئكرئەوئەى ھاوگىشەى دووجا بە دوو گۆراو

لەبەرئەوئەى ھەموو كات دەتوانين پادەى يەكتربرين لادەين كەواتە دەتوانين $B = 0$ گريمان بكەين و

ھاوگىشەى دووجاى دوو گۆراو بەم شٲوئەى بنوسين $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$

ئەم ھاوگىشەى يەككە لەم بارانەى خوارەو دەنوٲنٲت.

1. بازنە كاتىك $A = C \neq 0$ (دووبارى نارىكى ھەىە ئەوئش خال و كۆمەلەى بەتالە).

2. برگەى ھاوتا كاتىك يەككە لە گۆراوئەكانى دووجا وئەى تريان پلەىەك بٲت.

3. برگەى ناتەواو كاتىك A و C ھەمان نيشانەيان ھەبٲت (دووبارى نارىكى ھەىە خال و كۆمەلەى بەتال).

4. برگەى زياد كاتىك A و C دوو نيشانەى جاوازيان ھەبٲت (بارىكى نارىكى ھەىە دوو راستەھٲلى يەكتربر).

5. راستەھٲل كاتىك $A = C = 0$ و بەلاىەنى كەمەوئە يەككە لە دوو ھاوگۆلگەى D و E جياوازين لە سفر.

6. پاسته‌هیلک یان دوو پاسته‌هیلک ئه‌گەر له توانادا بوو لای چه‌پی هاوکیشه‌که شیتەل بکریت به شیوه‌ی ئه‌نجامی لیکدانی دوو کۆلکە‌ی هیلی. ئەم خستە‌یه‌ی خواره‌وه چه‌ند نمونه‌یه‌کن.

تیپینی	هاوکیشە	F	E	D	C	B	A
$F < 0; A = C$	$x^2 + y^2 = 4$	-4	0	0	1	0	1
دوجایه له y ، هیلییه له x .	$y^2 = 9x$	0	0	-9	1	0	0
$F < 0, A \neq C, AC > 0$	$4x^2 + 9y^2 = 36$	-36	0	0	9	0	4
تەوهری y	$x^2 = 0$	0	0	0	0	0	1
شیتەل بۆ $(x-1)(y+1) = 0$ $y = -1, x = 1$	$xy + x - y - 1 = 0$	-1	-1	1	0	1	0
شیتەل بۆ $(x-1)(x-2) = 0$ $x = 2, x = 1$	$x^2 - 3x + 2 = 0$	2	0	-3	0	0	1
خالی بنه‌په‌ت	$x^2 + y^2 = 0$	0	0	0	1	0	1
کۆمه‌له‌ی به‌تال	$x^2 = -1$	1	0	0	0	0	1

تاقیکردنه‌وه‌ی جیاکه‌ره‌وه Discriminant Test

به ره‌چاوکردنه‌وه‌ی ئه‌وه‌ی هه‌ندێک بره‌گه‌ی قوچه‌کی باری ناپێکیان هه‌یه، به‌لام ئه‌و چه‌ماوه‌ی هاوکیشه‌ی $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ بنوینیت، ده‌بیته:

- بره‌گه‌ی هاوتا کاتیك جیاکه‌ره‌وه بکاته 0.
- بره‌گه‌ی ناته‌واو کاتیك جیاکه‌ره‌وه سالبه.
- بره‌گه‌ی زیاد کاتیك جیاکه‌ره‌وه موجهه.

جیاکه‌ره‌وه

$$B^2 - 4AC$$

تاقیکردنه‌وه‌ی جیاکه‌ره‌وه

نمونه 3

جۆری ئەم چه‌ماوه‌یه دیاریبکه‌که هه‌ریه‌ک له‌م هاوکیشانه‌ ده‌نوینیت:

ا $3x^2 - 6xy + 3y^2 + 2x - 7 = 0$
ب $x^2 - xy + y^2 - 1 = 0$
ج $xy - y^2 - 5y + 1 = 0$

شیکار

ا $B^2 - 4AC = (-6)^2 - 4(3)(3) = 36 - 36 = 0$ بره‌گه‌ی هاوتایه.

ب $B^2 - 4AC = (1)^2 - 4(1)(1) = 1 - 4 = -3 < 0$ بره‌گه‌ی ناته‌واوه.

ج $B^2 - 4AC = (1)^2 - 4(0)(-1) = 1 > 0$ بره‌گه‌ی زیاد.

3. جۆری ئەم چه‌ماوه‌یه دیاریبکه‌که هه‌ریه‌ک له‌م هاوکیشانه‌ ده‌نوینیت.

ا $2x^2 - 4xy + 2y^2 + 2x - 7 = 0$
ب $2x^2 + xy + y^2 - 5 = 0$

ج $x^2 - xy - y^2 - 5y + 1 = 0$



لە ٲاھینانی 1 تا 8 جیاکەرەو بەکاربھێنە بۆ دیاریکردنی جوړی ئەو چەماوەی ھاوکیښەکە دەنۆینیت.

$$3x^2 - 7xy + \sqrt{17}y^2 = 1 \quad \boxed{2}$$

$$x^2 - 3xy + y^2 - x = 0 \quad \boxed{1}$$

$$x^2 + 4xy + 4y^2 - 3x = 6 \quad \boxed{4}$$

$$x^2 + 2xy + y^2 - y + 2 = 0 \quad \boxed{3}$$

$$3x^2 - 5xy + 2y^2 - 7x - 14y = -1 \quad \boxed{6}$$

$$xy + y^2 - 3x = 5 \quad \boxed{5}$$

$$6x^2 + 3xy + 2y^2 + 17y + 2 = 0 \quad \boxed{8}$$

$$x^2 - 3xy + 3y^2 + 6y = 7 \quad \boxed{7}$$

بنووسە چى دەتوانیت بنووسیت لەبارەى ئەو وێنە پوونکردنەوێ ھاوکیښەى $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ دەنۆینیت، ئەگەر $AC < 0$ ؟ بەلگە بۆ وەلامەکەت بەھێنەو.

بنووسە نایا هیچ برگیەکی قوچەکی ٲک ھەبە لە ھاوکیښەى $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ ئەم سېفەتانەى تېدا بیت.

ا ھاوچى بیت لەگەل خالى بنەرەت.

ب بەخالى (1, 0) دا ٲروات، بەلگە بۆ وەلامەکەت بەھێنەو.

ا جوړى برگیە قوچەکی ئەم ھاوکیښەى $xy + 2x - y = 0$ دیاریبکە؟

ب ھاوکیښەکە بەکاربھێنە بۆ ئەوێ بە ھاى y بەٲی x بنووسیت، ئەو ھاوکیښەى دەستت

کەرەت بە شێوێ نەخسەى کی رێژەى y بەٲی x بنۆینە.

ج ٲۆوتانى دوو خالى برگیە قوچەکییەکە بدۆزەرە کە تێیدا لیکەرەت ئەستوونە لەگەل

$$y = -2x$$

نیشانەى AC راستى ھرەر دەستەواژەى ک لەبارەى چەماوەى $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ بسلەلمینە یان دژە نمونەى ک بەھێنەو بۆ سەلماندى ناراستى دەستەواژەکە.

ا ئەگەر $AC > 0$ ئەوا چەماوەکە برگیە ناتەواو.

ب ئەگەر $AC = 0$ ئەوا چەماوەکە برگیە ھاوتایە.

ج ئەگەر $AC < 0$ ئەوا چەماوەکە برگیە زیادە.

بەرەنگارى «بۆ تېرپوانین»

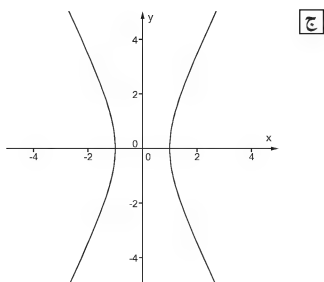
رووبەرى برگیە ناتەواو ئەگەر $B^2 - 4AC < 0$ ئەوا وێنەى پوونکردنەوێ ھاوکیښەى

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 = 1$$

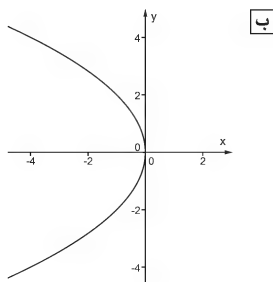
ٲووبەرەکەى دەکاتە πab بسلەلمینە کە رووبەرى برگیە ناتەواو دەکاتە $\frac{2\pi}{\sqrt{4AC - B^2}}$ و تەوەرە گەرەکەى $2a$ و تەوەرە بچووکەکەى $2b$ و

پىداچونەۋى بەش

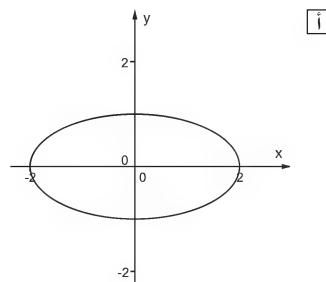
لە پىرسىيىرى 1 تا 6 وىنەى پوونكرىنەۋەى ھەر ھاۋكىشەىيەك دىارىبەكە.



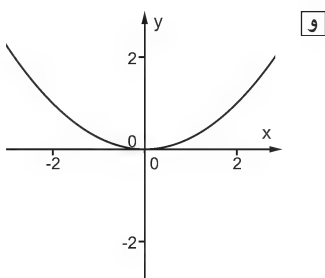
ج



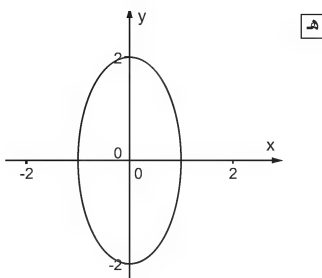
ب



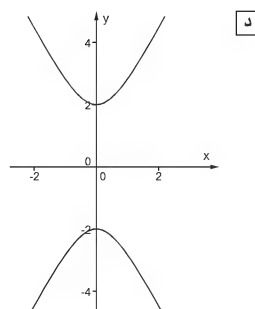
ا



و



ه



د

$$y^2 = -4x \quad \boxed{3}$$

$$4x^2 - y^2 = 4 \quad \boxed{2}$$

$$4x^2 + y^2 = 4 \quad \boxed{1}$$

$$x^2 = 4y \quad \boxed{6}$$

$$x^2 + 4y^2 = 4 \quad \boxed{5}$$

$$y^2 - 4x^2 = 4 \quad \boxed{4}$$

لە پىرسىيىرى 7 تا 10 ھاۋكىشەىيەك شىتەلەكە و پوونكرىنەۋەكەى بكىشە.

$$3x^2 - 2y^2 + 24x + 12y + 24 = 0 \quad \boxed{8}$$

$$16x^2 + 16y^2 - 16x + 24y - 3 = 0 \quad \boxed{7}$$

$$y^2 - 12y - 8x + 20 = 0 \quad \boxed{10}$$

$$3x^2 + 2y^2 - 12x + 12y + 29 = 0 \quad \boxed{9}$$

لە دوو پىرسىيىرى 11 و 12 ھاۋكىشەىيەك بىرگە ھاۋتايەكە بدۆزەۋە.

$$\text{سەر} (4, 2) \text{ تىشكۆ} (4, 0) \quad \boxed{12}$$

$$\text{سەر} (0, 2) \text{ دەلىل } x = -3 \quad \boxed{11}$$

لە دوو پىرسىيىرى 13 و 14 ھاۋكىشەىيەك بىرگە ناتەۋادەكە بدۆزەۋە.

$$\text{چەق: } (0, 0) \quad \boxed{14}$$

$$\text{سەرەكان: } (-3, 0) \text{ و } (7, 0) \quad \boxed{13}$$

$$\text{بە دوو خالى } (1, 2) \text{ و } (2, 0) \text{ دا دەپرات.}$$

$$\text{چەق: } (0, 0) \text{ و } (4, 0)$$

لە دوو پىرسىيىرى 15 و 16 ھاۋكىشەىيەك بىرگە زىادەكە بدۆزەۋە.

$$\text{تىشكۆكان: } (0, -8) \text{ و } (0, 8) \quad \boxed{16}$$

$$\text{سەرەكان: } (-4, 0) \text{ و } (4, 0) \quad \boxed{15}$$

$$\text{ھىللە دەرەكە نارەكان: } y = 4x \text{ و } y = -4x.$$

$$\text{تىشكۆكان: } (-6, 0) \text{ و } (6, 0)$$

17 ھاوکیئشە لیكەوتی بېرگە ھاوتای $y = x^2 - 2x + 2$ بدۆزەو، كە ئەستونە لەگەڵ راستەھێلی $y = x - 2$.

18 ھاوکیئشە لیكەوتی بېرگە ھاوتای $3x^2 + y = x - 6$ بدۆزەو، كە ئەستونە لەگەڵ راستەھێلی $2x + y = 5$.

19 سیئلی وەرگر پارچەییەکی سیئلە وەرگریکی گەرە شێوێ بېرگە ھاوتایەك وەردەگرێت كە ھاوکیئشەكە $y = \frac{x^2}{200}$ بێت كاتیك $-100 \leq x \leq 100$ نەخشەسازەكە ئامیڕی وەرگرەكە لە تیشكۆی بېرگە ھاوتایەكە دانا، پۆوتانی ئەم تیشكۆیانە چەندە؟

20 جیاوازی چەقی بۆ ئەم بېرگە قوچەکییانە بدۆزەو و جۆرەکانی دیاریبکە.

ا $x^2 + 4y^2 - 6x + 16y + 21 = 0$

ب $4x^2 - y^2 - 4x - 3 = 0$

ج $25x^2 - 10x - 200y - 199 = 0$

د $9x^2 + 9y^2 - 36x + 6y + 34 = 0$

لە پرسباری 21 تا 24 ھاوکیئشە بېرگە قوچەکییەك بەشێوەی گشتی بدۆزەو.

21 جیاوازی چەقی: 0.7 تیشكۆكان: $(0, \pm 2)$

22 سەرەكان: $(\pm 5, 0)$ جیاوازی چەقی: 1.5

23 بېرگە ھاوتا تیشكۆ: $(1, 1)$ سەر: $(0, 1)$

24 بېرگە ناتەواو تیشكۆ: $(-3, 0)$ دەلیل: $x = -9$ جیاوازی چەقی: $\frac{1}{2}$

لە پرسباری 25 تا 28 جۆری بېرگە قوچەکییەكەو پیکهاتەکانی بدۆزەو.

25 $16x^2 + 25y^2 + 96x - 256 = 0$

26 $16x^2 - 25y^2 + 96x - 256 = 0$

27 $4x^2 + y^2 - 16x - 20 = 0$

28 $x^2 - 3y^2 + 8x + 12y + 16 = 0$

لە پرسباری 29 تا 34 جیاكەرەو بەكاربھێنە بۆ دیاریکردنی جۆری ڕوونکردنەو ھاوکیئشەكە.

29 $3x^2 - 18xy + 27y^2 - 5x + 7y + 4 = 0$

30 $2x^2 - \sqrt{15}xy + 2y^2 + x + y = 0$

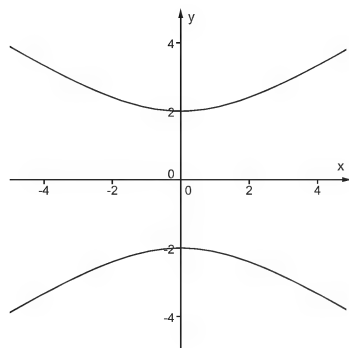
31 $2x^2 + 4xy - y^2 - 2x + 3y - 6 = 0$

32 $x^2 + y^2 + 3x - 2y - 10 = 0$

33 $xy + y^2 - 3x - 5 = 0$

34 $3x^2 + 12xy + 12y^2 + 435x - 9y + 72 = 0$

ئامادەكارى بۇ تاقىکردنەو



1 كام لەمانە ھاوکیڭشەى وینەى بەرامبەرە؟

$4x^2 + 9y^2 = 36$ ☐ ب

$9x^2 - 4y^2 = 36$ ☐ ا

$9x^2 + 4y^2 = 36$ ☐ د

$9y^2 - 4x^2 = 36$ ☐ ج

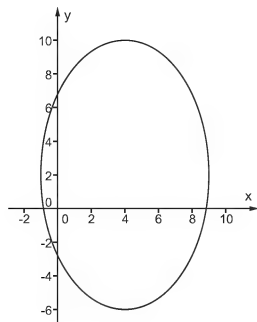
2 كام لەم خالانە دەپتە خالى يەكترپىنى ھاوکیڭشەى $4x^2 + 25y^2 = 100$ لەگەل تەوهرى x .

$(-4, 0)$ و $(4, 0)$ ☐ ب

$(-2, 0)$ و $(2, 0)$ ☐ ا

$(-10, 0)$ و $(10, 0)$ ☐ د

$(-5, 0)$ و $(5, 0)$ ☐ ج



3 كام لەمانە ھاوکیڭشەى وینەى بەرامبەرە؟

$\frac{x^2}{625} + \frac{y^2}{576} = 1$ ☐ ب

$\frac{(x-4)^2}{25} + \frac{(y-2)^2}{64} = 1$ ☐ ا

$\frac{x^2}{175} + \frac{y^2}{225} = 1$ ☐ د

$\frac{(x-1)^2}{20} + \frac{(y-1)^2}{150} = 1$ ☐ ج

4 كام لەم بېگە زيادانە گەورەترين دوورى نىوان دوو تيشكۆى ھىيە؟

$\frac{(x+22)^2}{45} - \frac{(y-36)^2}{125} = 1$ ☐ ب

$\frac{(x-6)^2}{36} - \frac{(y+2)^2}{81} = 1$ ☐ ا

$\frac{(y-59)^2}{90} - \frac{(x+76)^2}{95} = 1$ ☐ د

$\frac{(y+115)^2}{49} - \frac{(x-225)^2}{100} = 1$ ☐ ج

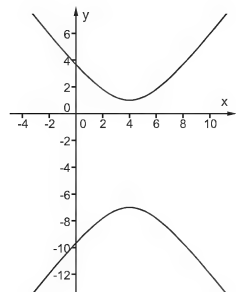
5 كام لەم ھاوکیڭشەى دەرکەنارى بۇ بېگەى زياد $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$.

$y = \frac{3}{2}x$ ☐ ب

$y = -\frac{2}{3}x$ ☐ ا

$y = \frac{9}{4}x$ ☐ د

$y = -\frac{9}{4}x$ ☐ ج



6 كام لەمانە ھاوکیڭشەى وینەى بەرامبەرە؟

$\frac{(x+3)^2}{16} - \frac{(y-4)^2}{9} = 1$ ☐ ب

$\frac{(x-3)^2}{16} - \frac{(y+4)^2}{9} = 1$ ☐ ا

$\frac{(y+3)^2}{16} - \frac{(x-4)^2}{9} = 1$ ☐ د

$\frac{(y-3)^2}{16} - \frac{(x+4)^2}{9} = 1$ ☐ ج

7 دريژى تەوهرى بچووكى بېگەى ناتەواوى $\frac{x^2}{49} + \frac{y^2}{121} = 1$ برىتیبە لە:

☐ ب 22

☐ ج 14

☐ د 11

☐ ا 7

8 كام لەم برڭە ھاوتايانەى خوارەوہ كراوہتەوہ بەلاى چەپدا؟

16y - 4x^2 = 12 [i]

16y + 4x^2 = 12 [ب]

16x - 4y^2 = 12 [ج]

16x + 4y^2 = 12 [د]

9 كام لەمانەى دىت تەوہرى ھاوچىيە بۆ برڭەى ھاوتاي (y + 2)^2 = 8(x - 4)؟

x = 0 [i] y = -2 [ب] x = 4 [ج] y = 8 [د]

10 كام لەم برڭە ھاوتايانە دەليلەكەى برىتييە لە y = 4؟

y + 3 = 1/4(x - 1)^2 [i]

y - 5 = 1/4(x + 2)^2 [ب]

x - 5 = 1/4(y + 4)^2 [ج]

x + 3 = 1/4(y - 2)^2 [د]

11 ليكەوتى برڭە ھاوتاي y = ax^2 لە x = p تەوہرى x دەبرىت لە؟

x = p/2 [i] x = p^2/2 [ب] x = ap/2 [ج] x = ap^2/2 [د]

12 لارى ليكەوت بۆ چەماوہيەك لە خالى (x, y) دەكاتە x/y بۆ ھەر خالىكى سەر چەماوہكە، جوړى چەماوہكە چىيە؟

[i] بازنە [ب] برڭەى ھاوتا [ج] برڭەى ناتەواو [د] برڭەى زياد

13 كام لەمانەى خوارەوہ تيشكووى برڭە ھاوتاي y^2 + 4y - 8x + 36 = 0؟

(-2, 6) [i] (6, -2) [ب] (2, -2) [ج] (4, -2) [د]

14 جوړى ئەو چەماوہ چىيە كە ھاوكيشەكەى 0 = x^2 + 4y^2 - 6x + 16y + 21 بىت.

[i] بازنە [ب] برڭەى ھاوتا [ج] برڭەى ناتەواو [د] برڭەى زياد

ژماره ئاویتەکان و ئەندازه

Complex Numbers And Geometry

بەشی حەوتەم

وانەکان

1-7 شۆه جیاوازهکانی ژماره
ئاویتە

2-7 ژماره ئاویتەکان و ئەندازه

پیداچوونهوه

ئامادهکردن بۆ تاقیکردنهوه

شۆه پهیدا بووهکان

شۆه پهیدا بووهکان بریتین له پهیدا بوونی
زنجیرهیی به دهستپێکردن له خالێکی
دیاریکراودا یان شۆهیهکی دیاریکراو.
ژماره ئاویتەکان بهکاردهیئێت بۆ
پێکهێنانی شۆه پهیدا بووهکان و هک ئه
شۆهیهی که وێنهکه دهريدهخات.

ئايا تۆ ئامادەيت؟

زاراۋەكان ✓

1. ھەر دەستەۋازىيەك لەستوونى يەكەم بېستەۋە بە پروونكر دىنەۋەكەى لە ستوونى دوۋەم.
2. 1. ژمارەى ئاۋىتە
3. 2. ژمارەيكە بەشۋەى $\frac{a}{b}$ دىنوسرىت، كاتىك a ، b دوو ژمارەى تەۋاون و $b \neq 0$.
4. 3. پاكىشان
5. 4. ژمارەيكە بەشۋەى $a + ib$ دىنوسرىت كاتىك a ، b ژمارەى راستىن $i^2 = -1$.
6. 5. ۋىنەدانەۋە
7. 6. بەدەۋرى راستەھىل
8. 7. ژمارەيكە بەشۋەى $a + ib$ دىنوسرىت كاتىك a ، b ژمارەى راستەھىل k .
9. 8. ژمارەى راستى
10. 9. ھاۋرېژەى
11. 10. دوۋرى ئىۋان خالىكى لەسەر تەۋەرى ژمارەكان و خالى بىنەرەتە.
12. 11. ۋىنەدانەۋە بەدەۋرى تەۋەرى x .
13. 12. ۋىنەدانەۋە بەدەۋرى تەۋەرى y .
14. 13. ھاۋرېژەيكە ئەندازەى چەقەكەى خالى
15. 14. خولانەۋە بەدەۋرى خالى بىنەرەت
16. 15. خولانەۋە بەدەۋرى خالى بىنەرەت
17. 16. ۋىنەدانەۋە بەدەۋرى راستەھىل $x = 2$
18. 17. پاشان خولانەۋە بەدەۋرى خالى بىنەرەت
19. 18. گۆشەكەى 90° بىت.
20. 19. گۆشەكەى 135° بەگۆشەى
21. 20. گۆشەكەى 90° بىت.

جىگۆركى ئەندازەيىەكان ✓

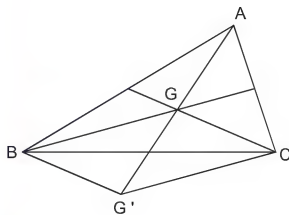
لە راھىنانى 2 تا 9 پۆۋتانى شىۋەى خالى $A(1, 1)$ بە جىگۆركى دىارىكراۋ بدۆزەۋە:

1. ۋىنەدانەۋە بەدەۋرى تەۋەرى x .
2. ۋىنەدانەۋە بەدەۋرى تەۋەرى y .
3. ۋىنەدانەۋە بەدەۋرى راستەھىل $y = x$.
4. ھاۋرېژەيكە ئەندازەى چەقەكەى خالى
5. خولانەۋە بەدەۋرى خالى بىنەرەت
6. خولانەۋە بەدەۋرى خالى بىنەرەت
7. ۋىنەدانەۋە بەدەۋرى راستەھىل $x = 2$
8. پاشان خولانەۋە بەدەۋرى خالى بىنەرەت
9. گۆشەكەى 90° بىت.
10. گۆشەكەى 135° بەگۆشەى
11. گۆشەكەى 90° بىت.

ھاۋكىشەى دوۋجايى ✓

لە راھىنانى 10 تا 13 جۆرى رەگەكانى ھاۋكىشەى دوۋجايى و ژمارەكانيان دىارىبكە.

1. $x^2 + x + 1 = 0$
2. $2x^2 + 5x - 9 = 0$
3. $2x^2 + 8x + 8 = 0$
4. $-3x^2 + 5x - 11 = 0$



14. لەۋىنەى بەرامبەر، G خالى يەكترىپىنى ھىلە ناۋەندەكانى سىگۆشەى ABC و G' شىۋەى G بە ۋىنەدانەۋە بەدەۋرى ناۋەر راستى BC دىنوسرىت $\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC}$ بدۆزەۋە.

ئاراستەبەرەكان ✓

شیوه جیاوازه‌کانی ژماره‌ی ناوټه

Various Forms of a Complex Number

نامانجه‌کان

- به‌های روتی ژماره ناوټه و گۆشه جه‌مسره‌یه‌ک‌ه‌ی ده‌دۆزټه‌وه.
- ژماره‌یه‌کی ناوټه به‌شیوه‌ی جه‌بری و سیگۆشه‌یی و جه‌مسره‌ی ده‌نوسیت.

زاراوه‌کان

Vocabulary

- به‌های پووت Absolute Value
- گۆشه‌ی جه‌مسره‌ی Argument
- شیوه‌ی جه‌بری
- Algebraic Form
- شیوه‌ی سیگۆشه‌یی
- Trigonometric Form
- شیوه‌ی جه‌مسره‌ی Polar Form

له‌پۆلی یازده‌دا فی‌ربوویت که شیکارکردنی ئەو هاوکیشه دووجایانه‌ی جیاکه‌ره‌وه‌کانیان سالبه، پۆیستیان به‌جۆریکی نوێ له ژماره‌کان هه‌یه ئەویش ژماره ناوټه‌کانه، هه‌روه‌ها فی‌ربوویت هه‌ر ژماره‌یه‌کی ناوټه به‌شیوه‌ی $z = x + iy$ و ته‌نها به‌و شیوه‌یه ده‌نوسریت، کاتیکی x و y دوو ژماره‌ی راستین و i ژماره‌یه‌کی خه‌یالییه پاسادانی $i^2 = -1$ ده‌کات.

له‌مه‌وه ده‌رده‌چټت هه‌ر ژماره‌یه‌کی ناوټه $z = x + iy$ جووته پټکخراویکی وه‌ک (x, y) دیاریده‌کات که له‌ دوو ژماره‌ی راستی پټکه‌هاتوه و به‌خالیکی وه‌ک $M(x, y)$ له‌ پووته‌ختی پۆوتاندا ده‌نوسریت به‌م خاله‌ش ده‌وترټت خالی ژماره ناوټه‌ی z به‌شیوه‌ی M_z ده‌نوسریت. له‌لایه‌کی تره‌وه هه‌ر خالیکی وه‌ک $A(a, b)$ له‌ پووته‌ختی پۆوتانه‌کان وه‌ک جووته پټکخراوی (a, b) دیاریده‌کات وله‌ کۆتاییدا ژماره‌یه‌کی ناوټه‌ی وه‌ک $u = a + ib$ پټکه‌ده‌ه‌یټت و به‌م ژماره‌یه ده‌وترټت ژماره‌ی خالی ناوټه‌ی A به‌ شیوه‌ی z_A ده‌نوسریت.

شیوه‌ی جه‌بری

شیوه‌ی جه‌بری ژماره‌ی ناوټه‌ی z به‌شیوه‌ی $z = x + iy$ ده‌نوسریت، کاتیکی x و y دوو ژماره‌ی راستین و i ژماره‌یه‌کی خه‌یالییه و پاسادانی $i^2 = -1$ ده‌کات و هه‌روه‌ها له‌پۆلی یازده‌دا فی‌ربوویت که z ته‌نها به‌یه‌ک پټکا ده‌نوسریت، به‌ x ده‌وترټت به‌شی راستی z و ده‌نوسریت $R(z)$ و به‌ y ده‌وترټت به‌شی خه‌یالی z و ده‌نوسریت $I(z)$.

هه‌موو ژماره‌یه‌کی ناوټه $z = a + ib$ ژماره‌یه‌کی ناوټی هه‌یه $\bar{z} = a - ib$ (ناوټی ژماره‌ی z) تټبټینی ئەوه بکه به‌شی راستی هه‌ردوو ژماره‌ی z و \bar{z} یه‌کسانن $R(\bar{z}) = R(z)$ وهه‌ر دوو به‌شی خه‌یالی له‌نیشانده‌دا پټچه‌وانه‌ی یه‌کترن $I(\bar{z}) = -I(z)$.

دۆزینه‌وه‌ی به‌شی راستی و به‌شی خه‌یالی ژماره‌ی ناوټه

ژماره‌ی ناوټه‌ی $z = \frac{1-2i}{1+2i}$ به‌شیوه‌ی جه‌بری بنووسه و به‌شی راستی و خه‌یالی بدۆزه‌وه.

شیکار

سه‌ره‌و ژټره له‌ناوټی ژټره بده، بۆ ئەوه‌ی له‌ i ی ژټره رزگارټت.

$$z = \frac{1-2i}{1+2i} = \frac{(1-2i)(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)}$$

$$z = \frac{1-2i-2i+4i^2}{1-4i^2} = \frac{1-4i-4}{1+4} = \frac{-3-4i}{5} = -\frac{3}{5} - \frac{4}{5}i$$

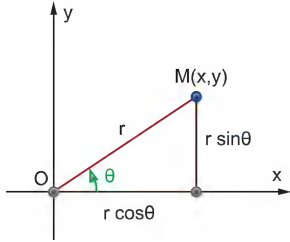
به‌شی راستی z ده‌کاته $R(z) = -\frac{3}{5}$ و به‌شی خه‌یالی $I(z) = -\frac{4}{5}$.

1. ژماره‌ی $z = (2-3i)(5i-4)(-7(i-1))$ به‌شیوه‌ی جه‌بری بنووسه و به‌شی راستی و خه‌یالی بدۆزه‌وه.



له‌گه‌ل شیوه‌ی جه‌بری ژماره‌ی ناوټه، شیوه‌ی سیگۆشه‌یی و شیوه‌ی جه‌مسره‌ی هه‌یه، که بۆ شیکارکردنی زۆر له‌ پرسیاره‌کان به‌چه‌نده‌ها پټگای کورت به‌کارده‌ه‌یټن.

شیوهی سیگوشهیی



له شیوهی بهرامبهردا M خالی ژمارهیی $z = x + iy$ ($z \neq 0$)،
 ئەم خاله ژمارهییکی موجه r دهنوینیت که دهکاته دوری نیوان M
 و خالی بنه پرت 0 ، له گهل ژمارهییکی راستی تر که بریتیه له پیوانهیی
 گوشهیی ئاراسته کراوی θ (به پادیان) که تیشکی OM له گهل نیوهی
 موجهیی تهوهری x پیکدههینیت. به ژمارهیی یه کهم دهوتریت به های
 پروتی z و به $|z|$ هیما دهکریت و به ژمارهیی دووهم دهوتریت گوشهیی
 جه مسهری ژماره z و به $\arg(z)$ هیما دهکریت.

تیبینی ئەوه بکه که به های پروتی ژمارهیی ئاویتته دیاریکراوه به بی هیچ ئالوژییه که به لام
 دیاریکردنی گوشهیی جه مسهری هه ندیک ئالوژی دروست دهکات. بۆ نمونه: ئەگەر $\frac{\pi}{3}$ پیوانهیی گوشهیی
 جه مسهری z بیت، ئەوا $2n\pi + \frac{\pi}{3}$ کاتیک n ژمارهییکی تهواوه، پیوانهییکی تری گوشه کهیه، ئەوهش
 وامان لی دهکات که باس له گوشه کهیه کی جه مسهری ژمارهیی ئاویتته بکهین نه که باس له گوشه
 جه مسهریه کهیه کی ژماره کهیه کی ئاویتته بکهین.

ئەگەر بگه پینه وه بۆ وینهیی سهره وه، دهتوانین بنوسین: $x = r \cos \theta$ و $y = r \sin \theta$
 له وایدا $z = x + iy = r \cos \theta + ir \sin \theta = r(\cos \theta + i \sin \theta)$

شیوهی سیگوشهیی ژمارهیی ئاویتته

شیوهی سیگوشهیی ژمارهیی ئاویتته $z = x + iy$ ($z \neq 0$) دهکاته $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$
 کاتیک $\tan \theta = \frac{y}{x}$ و $r = \sqrt{x^2 + y^2}$

نموونه 2 نووسینی ژمارهیی ئاویتته به شیوهی سیگوشهیی

ژمارهیی $z = 2 + 2\sqrt{3}i$ به شیوهی سیگوشهیی بنوسه.

شیکار

دهست به دۆزینه وهی به های پروتی ژماره که بکه.

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{2^2 + (2\sqrt{3})^2} = \sqrt{4 + 12} = \sqrt{16} = 4$$

گوشهیی جه مسهری بدۆزه وه.

$\tan \theta = \frac{y}{x} = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$ به مهش $\theta = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ ، چونکه خالی M_z دهکاویتته چاریکی
 یه کهم له پروتهختی پۆوتانه کان.

شیوهی سیگوشهیی بۆ ژماره ئاویتته z بریتیه له $z = 4\left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}\right)$

2. ژماره ئاویتته $z = 2\sqrt{3} + 2i$ به شیوهی سیگوشهیی بنوسه.



شیوهی سییه بۆ نووسینی ژمارهیی ئاویتته پپی دهوتریت شیوهی جه مسهری (هه ندیک جار پپی
 دهوتریت شیوهی توانی) ئەوهش کورته کراوهی کرداری شیوهی سیگوشه ییه.

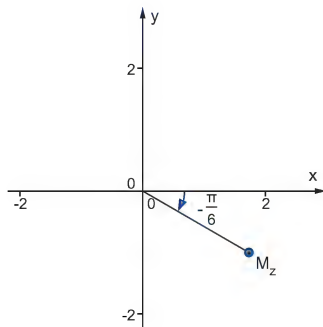
شیوهی جهمسهری

ئهوانهیی لهبواریی بیرکاری کاردهکهن پیناسهیی $e^{i\theta}$ بهم شیوهیه دهکهن $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ ئهمهش رینگا دهوات ههر ژمارهیهکی ئاویتتهیی $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ جیاوازی بیت لهسفر بهشیوهی $z = re^{i\theta}$ بنوسریت. ئهم نووسینه پئی دهوتریت شیوهی جهمسهری ژماره ئاویتتهیی z لهوانهیه پرسیار له پهیههندییهک لهنیوان $e^{i(\theta+\theta')}$ و ههریهکه له $e^{i\theta}$ و $e^{i\theta'}$ بکهیت ئایا پهیههندییهک ههیه لهنیوان ئهم نووسینه و پهیههندی $e^{i(\theta+\theta')} = e^{i\theta} e^{i\theta'}$ وهک له توهانهکاندا ههیه کاتیکی $a^{x+y} = a^x a^y$ ؟ وهلام بۆ ئهم پرسیاره بهلێیه و دهتوانین بهم شیوهیه بیسهلمینیت.

$$\begin{aligned} e^{i\theta} e^{i\theta'} &= (\cos \theta + i \sin \theta)(\cos \theta' + i \sin \theta') \\ &= \cos \theta \cos \theta' + i \cos \theta \sin \theta' + i \sin \theta \cos \theta' + i^2 \sin \theta \sin \theta' \\ &= \cos \theta \cos \theta' + i \cos \theta \sin \theta' + i \sin \theta \cos \theta' - \sin \theta \sin \theta' \\ &= \cos \theta \cos \theta' - \sin \theta \sin \theta' + i(\cos \theta \sin \theta' + \sin \theta \cos \theta') \\ &= \cos(\theta + \theta') + i \sin(\theta + \theta') = e^{i(\theta + \theta')} \end{aligned}$$

شیوهی جهمسهری ژمارهیی ئاویتته

شیوهی جهمسهری ژمارهیی ئاویتتهیی $z = x + iy$ ($z \neq 0$) بریتیه له $z = re^{i\theta}$ کاتیکی $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ و $\tan \theta = \frac{y}{x}$.



نووسینی ژمارهیی ئاویتته بهشیوهی جهمسهری

ژمارهیی $z = \sqrt{3} - i$ بهشیوهی جهمسهری بنووسه.

شیکار

دهست به دۆزینهوهی بههای پرووتی ژمارهکه بکه.

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = \sqrt{3+1} = \sqrt{4} = 2$$

گۆشهیی جهمسهری ژمارهکه بدۆزهوه.

$\tan \theta = \frac{y}{x} = \frac{-1}{\sqrt{3}}$ بهمهش $\theta = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$ لهبههروهی خالی M_z دهکهویتته چاریکی چوارهم له پرووتهختی پۆتانهکاندا.

شیوهی جهمسهری ژمارهیی ئاویتتهیی z دهکاته $z = 2e^{-i\frac{\pi}{6}}$.

نمونه 3

3. ژماره ئاویتتهیی $z = -2 + 2i$ به شیوهی جهمسهری بنووسه.



سیفتهکانی بههای پرووت و گۆشهیی جهمسهری ژمارهیی ئاویتته

$$\begin{aligned} \left| \frac{z_1}{z_2} \right| &= \frac{|z_1|}{|z_2|} \quad \text{و} \quad |z_1 z_2| = |z_1| |z_2| \quad \text{ب} \quad z = 0 \quad \text{ئهگهر وتهنهئا ئهگهر} \quad \text{ا} \quad |z| \geq 0 \quad \text{و} \quad |z| = 0 \\ |z_1 + z_2| &\leq |z_1| + |z_2| \quad \text{د} \quad |\bar{z}| = |z| \quad \text{و} \quad |-z| = |z| \quad \text{ج} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) &= \arg(z_1) - \arg(z_2) + 2k\pi \quad \text{ب} \quad \arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2) + 2k\pi \quad \text{ا} \\ \arg\left(\frac{1}{z}\right) &= -\arg(z) + 2k\pi \quad \text{د} \quad \arg(z^n) = n \arg(z) + 2k\pi \quad \text{ج} \end{aligned}$$

نمونه 4

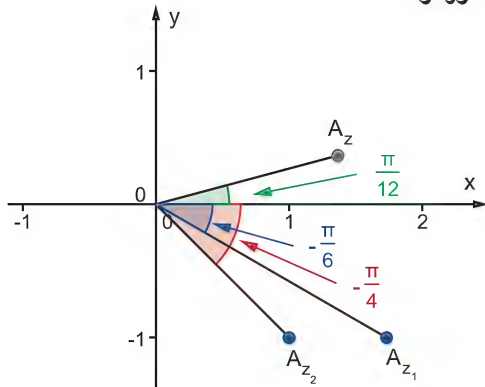
به کارهیتانی سیفته‌کانی بهای پروت و گوشه‌ی جه‌مسره‌ی

به‌های پروت و گوشه‌ی جه‌مسره‌ی هه‌ریه‌که له‌م ژماره‌ی ئاویتانه‌ی بدۆزه‌وه.

$$z = \frac{z_1}{z_2} \quad z_2 = 1 - i \quad z_1 = \sqrt{3} - i$$

پاشان به‌های هه‌ریه‌که له $\cos \frac{\pi}{12}$ و $\sin \frac{\pi}{12}$ بدۆزه‌وه.

شیکار



به‌های پروتی هه‌ر ژماره‌یه‌که هه‌ژماریه‌که.

$$|z_1| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1} = \sqrt{4} = 2$$

$$|z_2| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$$

$$|z| = \frac{|z_1|}{|z_2|} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

گوشه‌ی جه‌مسره‌ی هه‌ر ژماره‌یه‌که بدۆزه‌وه.

چونکه $\tan \theta_1 = \frac{-1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \arg(z_1) = \theta_1 = -\frac{\pi}{6} + 2m\pi$

چونکه $\tan \theta_2 = -1 \Rightarrow \arg(z_2) = \theta_2 = -\frac{\pi}{4} + 2n\pi$

$$\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg(z_1) - \arg(z_2) = -\frac{\pi}{6} + 2m\pi - \left(-\frac{\pi}{4} + 2n\pi\right) = \frac{\pi}{12} + 2(m-n)\pi$$

ژماره‌ی z به‌شێوه‌ی سیگوشه‌یی به‌م جۆره‌ی دهنوسریت $z = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12} \right)$

بۆ دۆزینه‌وه‌ی به‌های هه‌ریه‌که له $\cos \frac{\pi}{12}$ و $\sin \frac{\pi}{12}$ ژماره‌ی z به‌شێوه‌ی جه‌بری بنووسه.

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{\sqrt{3}-i}{1-i} = \frac{(\sqrt{3}-i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{\sqrt{3}+1+(\sqrt{3}-1)i}{2} = \frac{\sqrt{3}+1}{2} + \frac{\sqrt{3}-1}{2}i$$

$$\frac{\sqrt{3}+1}{2} + \frac{\sqrt{3}-1}{2}i = z = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12} \right)$$

$$\frac{\sqrt{3}-1}{2} = \sqrt{2} \sin \frac{\pi}{12} \quad \text{و} \quad \frac{\sqrt{3}+1}{2} = \sqrt{2} \cos \frac{\pi}{12}$$

$$\sin \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \quad \text{و} \quad \cos \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

4. به‌های پروت و گوشه‌ی جه‌مسره‌ی هه‌ریه‌که له‌م ژمارانه‌ی بدۆزه‌وه.

$$z = \frac{z_1}{z_2} \quad z_2 = 1 + i \quad z_1 = \frac{\sqrt{6} + i\sqrt{2}}{2}$$

پاشان به‌های هه‌ریه‌که له $\sin \frac{7\pi}{12}$ و $\cos \frac{7\pi}{12}$ بدۆزه‌وه.



De Moivre

سه‌لمیترای 1-7

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta$$

ئهم سه‌لمیترای سوودیکی گه‌وره‌ی هه‌یه بۆ ساده‌کردنی هه‌ندیک له‌ بره‌ جه‌برییه‌کان، هه‌روه‌ها به‌کارده‌هینریت له‌ سیگوشه‌زانی چونکه یارمه‌تیدهره‌ بۆ سه‌لمانندی زۆر له‌ هاوئه‌نجامه‌کان.

نمونه 5

جیبھجیکردن له سیگۆشەزانی

ئەم برە $\left(\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12}\right)^4$ بە سادەترین شیۆە بنووسە.

شیکار

$$\left(\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12}\right)^4 = \cos 4 \frac{\pi}{12} + i \sin 4 \frac{\pi}{12} = \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}$$

5. بری $\left(\cos \frac{\pi}{24} + i \sin \frac{\pi}{24}\right)^6$ بە سادەترین شیۆە بنووسە.



نمونه 6

دۆزینەوادی ھاوئەنجامە سیگۆشەییەکان

دوو ھاوئەنجام بدۆزەوادی بۆ نووسینی $\cos 3\theta$ و $\sin 3\theta$ بەپێی $\cos \theta$ و $\sin \theta$.

شیکار

$$\begin{aligned} (\cos \theta + i \sin \theta)^3 &= \cos^3 \theta + 3 \cos^2 \theta (i \sin \theta) + 3 \cos \theta (i \sin \theta)^2 + (i \sin \theta)^3 \\ &= \cos^3 \theta + 3i \cos^2 \theta \sin \theta - 3 \cos \theta \sin^2 \theta - i \sin^3 \theta \end{aligned}$$

بەلام

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^3 = \cos 3\theta + i \sin 3\theta$$

بەپشت بەستن بە سەلمێنراوی De Moivre دەردەچێت:

$$\cos 3\theta + i \sin 3\theta = \cos^3 \theta - 3 \cos \theta \sin^2 \theta + i (3 \cos^2 \theta \sin \theta - \sin^3 \theta)$$

لەمەش

$$\sin 3\theta = 3 \cos^2 \theta \sin \theta - \sin^3 \theta \quad \text{و} \quad \cos 3\theta = \cos^3 \theta - 3 \cos \theta \sin^2 \theta$$

6. دوو ھاوئەنجام بدۆزەوادی بۆ نووسینی $\cos 2\theta$ و $\sin 2\theta$ بەپێی $\cos \theta$ و $\sin \theta$.



رەگەکانی یەك

دەزانیت یەك دوو رەگی دووجای ھەبە ئەویش 1 و -1 و یەك رەگی سێجای ھەبە ئەویش 1، ئەمە راستە بۆ كۆمەڵەی ژمارە راستییەكان بەلام ئەگەر فراوانبكریت بۆ كۆمەڵەی ژمارە ئاوێتەكان دەبینیت كە یەك سێ رەگی سێجای ھەبە.

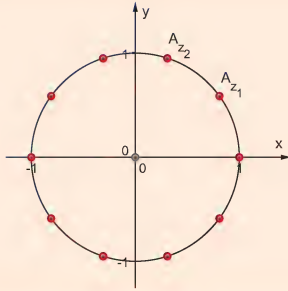
رەگەکانی یەك

بە ژمارە ئاوێتە $z = re^{i\theta}$ دەوتریت رەگی یەك لەپلەی n كاتێك n ژمارە یەكی تەواوی مۆجەبە ئەگەر پاسادانی $z^n = 1$ بكات.

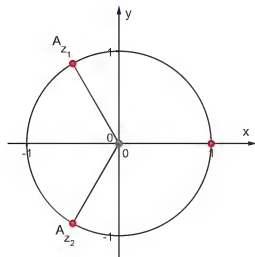
ئەگەر ھاوكێشە $z^n = 1$ بە ھەكارھێنانی شیۆە جەمسەری بۆ دوو ژمارە z و 1 نووسراوییت. ئەوا $z^n = r^n e^{in\theta} = 1 = 1 \times e^{i \times 0}$ دەستدەكەوێت.

$$\begin{cases} r = 1 \\ \theta = \frac{2k\pi}{n} \end{cases} \quad \text{پاشان} \quad \begin{cases} r^n = 1 \\ n\theta = 0 + 2k\pi \end{cases}$$

ھەر بەھایەك بەدەیتە k رەگێك بۆ یەك لە پلە n دیاریدەكات.



ئەگەر n ھەر ژمارە يەككى تەواۋى مۇجەب بىت ئەوا يەك n رەگى پلە n ى ھەيە. ئەم رەگانە سەرەكانى چەند لايەكى رېك پېككەھىننېت و ھەموويان دەكەونە سەر بازىنەى يەكە.



رەگە سىجكانى يەك

رەگە سىجكانى يەك بدۆزەو و خالەكان لە پروتەختى پۆتاندە ديارىيەكە.

شىكار

ژمارە يەك سى رەگى سىجاي ھەيە ئەمانەن:

$$z_1 = e^{i\frac{2\pi}{3}}, z_2 = e^{i\frac{4\pi}{3}}, z_3 = e^{i\frac{6\pi}{3}} = e^{2i\pi} = 1$$

ئەوانەى لەبوارى بىركارى كاردەكەن ھىمايەكى تايبەت z بۆ رەگى سىجاي $z_1 = e^{i\frac{2\pi}{3}}$ بەكاردەھىنن.

$$z_2 = e^{i\frac{4\pi}{3}} = j^2 = \bar{j}$$

7. رەگەكانى يەك لەپلە 4 بدۆزەو و خالەكانى لە پروتەختى پۆتاندەكاندا ديارىيەكە.



راھىنەن

1-7

لە راھىنەنى 1 تا 12 ژمارە ئاۋىتەكە بەشىۋەى جەبرى بنوسە.

$(1-3i)^2$ 4	$(1+3i)^2$ 3	$(1-i)^2$ 2	$(1+i)^2$ 1
$(3+2i)^3$ 8	$(3+4i)(3-4i)$ 7	$(1-i)^3$ 6	$(1+i)^3$ 5
$\frac{4+5i}{2-i} + \frac{1-3i}{1+i}$ 12	$\frac{i-4}{2+5i} + \frac{2+3i}{1-i}$ 11	$\frac{3+i}{2-i} + \frac{2-i}{3+i}$ 10	$\frac{i-5}{3+5i}$ 9

لە راھىنەنى 13 تا 20 ھەر ژمارە يەككى ئاۋىتە بەشىۋەى سىگۆشەيى و جەمسەرى بنوسە.

$z = 9i$ 16	$z = i$ 15	$z = 1-i$ 14	$z = 1+i$ 13
$z = 1-i\sqrt{3}$ 20	$z = 1+i\sqrt{3}$ 19	$z = 8$ 18	$z = -6$ 17

له رايهيناني 21 تا 25 ژماره ئاوښتهكه به شيوډي جهمسره بنووسه نهگه زانیت $z = re^{i\theta}$.

$$\frac{ie^{i\alpha}}{z^2} \quad \text{25} \quad z^3 \quad \text{24} \quad iz \quad \text{23} \quad \bar{z} \quad \text{22} \quad \frac{1}{z} \quad \text{21}$$

26 هرهكه له دوو ژماره ئاوښتانه به شيوډي جهمسره بنووسه.

$$z = 1 + \cos \frac{\pi}{10} + i \sin \frac{\pi}{10} \quad \text{ب} \quad z = (1 - \sqrt{3})e^{i\frac{\pi}{8}} \quad \text{ا}$$

27 بيسهلمينه: $|\bar{z}| = |z|$ و $|-z| = |z|$.

28 بيسهلمينه $z\bar{z} = |z|^2$ ئەم ئەنجامه بهكار بهينه بۆ سهلماندني $|zz'| = |z||z'|$.

29 بيسهلمينه $|\frac{1}{z}| = \frac{1}{|z|}$.

30 بيسهلمينه $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$.

31 ژماره ئاوښتهكاني z بدۆزهوه كه پاساداني $|z| = |1+z|$ دهكات.

32 ژماره ئاوښتهكاني z بدۆزهوه كه پاساداني $|z| = |1-z|$ دهكات.

له رايهيناني 33 تا 36 ژماره ئاوښتهكه به شيوډي سيگوښه بنووسه كاتيك.

$$z = \cos \alpha - i \sin \alpha \quad \text{34} \quad z = \sin \alpha + i \cos \alpha \quad \text{33}$$

$$z = \frac{\cos \alpha + i \sin \alpha}{\cos \alpha - i \sin \alpha} \quad \text{36} \quad z = -\cos \alpha - i \sin \alpha \quad \text{35}$$

37 وهلامی ئەمانەى خوارهوه بدهوه ئەگه زانیت $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

ا j به شيوډي جهمسره بنووسه ودهريبخه كه ئەم ژماره پهگى سيجايه بۆ يهك.

ب j^2 بدۆزهوه، ودهريبخه كه پهگى سيجاي ناپاستيه بۆ يهك و جياوازه له j .

ج دياريبكه كه $1 + j + j^2 = 0$ و $j^{3m+2} = j^2 = \bar{j}$ و $j^{3m+1} = j$ و $j^{3m} = 1$.

دهرباره چهكهكان

38 بهپاي تو ژماره پهگهكاني يهك له پله n دهكات چهند؟ پرونيكهوه.

ژماره ئاویتەکان و ئەندازه

Complex Numbers and Geometry

ئامانجەکان

- کردارەکان لەسەر ژماره ئاویتەکان بەئەندازەیی لیکەداتەوه.
- بە بەکارهێنانی ژماره ئاویتەکان شیکاری پرسپاری ئەندازەیی دەکات.

زاراوهکان

Vocabulary

ژمارە خالی

Affix of the point

خالی ژمارە ئاویتە

Point of the complex number

ژمارە ئاراستەبەری

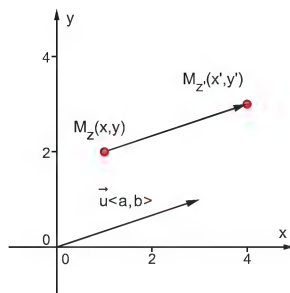
Affix of the vector

ئاراستەبەری ژمارە ئاویتە

Vector of the complex number

شیووی ئاویتە Complex form

لەوانەیی پیشوو فیروبویت که خالەکانی پووتەخت و ژماره ئاویتەکان بەرامبەر یەکتەرن، واتە هەر خالێک $M(x, y)$ ژماریهکی ئاویتە تاکانه $z_M = x + iy$ دیاریدهکات پێدهوتریت ژماره خالی $M(x, y)$ و هەر ژماریهکی ئاویتە $z = x + iy$ خالێکی تاکانه $M_z(x, y)$ دیاریدهکات پێدهوتریت خالی ژماره ئاویتە $z = x + iy$ لەلایهکی تر هەر ئاراسته‌بەریکی وەک $\vec{u}(a, b)$ ژماره‌یهکی ئاویتە $z = p + iq$ دیاریدهکات پێدهوتریت ژماره ئاراسته‌بەر، هه‌روه‌ها هەر ژماره‌یهکی ئاویتە $z = p + iq$ ئاراسته‌بەریکی وەک $\vec{v}(p, q)$ دیاریدهکات پێدهوتریت ئاراسته‌بەری ژماره $z = p + iq$ ، بەرامبەر بوون له نیوان ژماره ئاویتەکان لەلایهکی و خالەکانی پووتەخت و ئاراسته‌کانی لەلایهکی تر پێگا ددهات به‌واندنی کردارەکان لەسەر ژماره ئاویتەکان بەئەندازەیی هه‌روه‌ها پێگا ددهات به‌درپڕینی باره ئەندازەییەکان ئەمە لەم وانه‌یدا فیروده‌بیت.



کۆکردنه‌وه‌ی ژماره ئاویتەکان

با $u = a + ib$ ژماره‌یهکی ئاویتە و $\vec{u}(a, b)$ ئاراسته‌بەریکی

بیټ، ئەگەر ژماره‌ی u له‌گه‌ڵ ژماره‌ی ئاویتە $z = x + iy$

کۆیکه‌یتەوه ئەوا ژماره‌یهکی ئاویتە‌ی تری ده‌ستده‌که‌وێت.

$$z' = z + u = (x + iy) + (a + ib) = (x + a) + i(y + b)$$

ئەگەر $M(x, y)$ خالی ژماره ئاویتە‌ی z بیټ و $M'(x', y')$

$$\begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \end{cases}$$

ده‌سه‌لمێنیت که M' ده‌بیته‌ ویته‌ی M .

به‌پراکێشانی ئاراسته‌بەری $\vec{u}(a, b)$.

لیکدانه‌وه‌ی ئەندازەیی بۆ کۆکردنه‌وه‌ی ژماره ئاویتەکان

کۆکردنه‌وه‌ی دوو ژماره‌ی ئاویتە u و خالی ژماره‌ی z ده‌گۆرێت به‌پراکێشانی ئاراسته‌بەری \vec{u} .

دۆزینه‌وه‌ی ئاراسته‌بەری پراکێشان

ئاراسته‌بەری ئەو پراکێشانه‌ی که خالی ژماره‌ی $z = -2 + 3i$

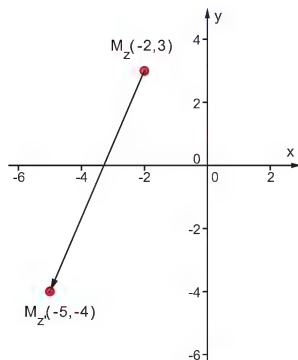
ده‌گۆرێت بۆ خالی ژماره‌ی $z' = -5 - 4i$ بدۆزێوه.

شیکار

ئەگەر $\vec{u}(a, b)$ ئاراسته‌بەری پراکێشان بیټ که M_z بۆ M_z

$$\begin{cases} -5 = (-2) + a \\ -4 = (3) + b \end{cases}$$

ئاراسته‌بەری $\vec{u}(a, b)$ ده‌کاته $\vec{u}(-3, -7)$.

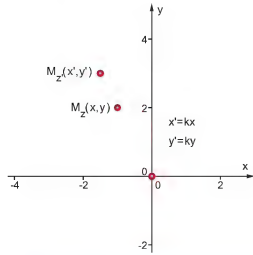


1. ئاراستەبىرى پاكىشان كەخالى ژمارەى ئاويتهى $z = 6 - 2i$ دەگۆرپىت بۆ خالى ژمارەى ئاويتهى $z' = 6 + 4i$ بدۆزەوه.



ليكدانى ژمارەيهكى ئاويته له ژمارەيهكى راستى

با $z = x + iy$ ژمارەيهكى ئاويته بىت و k ژمارەيهكى راستى بىت، ئەگەر z له k درا، ئەوا ژمارەيهكى ئاويته دەستەكهويته: $z' = kz = k(x + iy) = (kx) + i(ky)$
 ئەگەر $M_z(x, y)$ خالى ژمارەى ئاويتهى z بىت و $M'_z(x', y')$ خالى ژمارەى ئاويتهى z' بىت ئەوا:



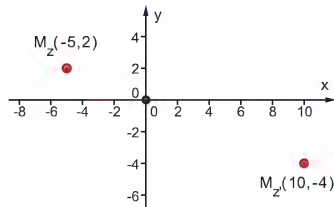
ئەمەش دەيسەلمىنيت كە M'_z برىتييه له ويتهى $\begin{cases} x' = kx \\ y' = ky \end{cases}$ به هاوپرژەيهكى ئەندازەيى چەقەكهى خالى بنهپەت و پرژەكهى k بىت.

ليكدانهوى ئەندازەيى بۆ ليكدانى ژمارەيهكى ئاويته له ژمارەيهكى راستى

ليكدانى ژمارە ئاويتهى z له ژمارەيهكى راستى k دەبىته هۆى گۆراني خالى ژمارەى z به هاوپرژەيهكى ئەندازەيى چەقەكهى خالى بنهپەت و پرژەكهى k بىت.

نمونە 2

دۆزينهوى پرژەى هاوپرژەى ئەندازەيى



پرژەى هاوپرژەى ئەندازەيى چەقەكهى خالى بنهپەت بىت چەندە كە خالى ژمارەى ئاويتهى $z = -5 + 2i$ بۆ خالى ژمارەى ئاويتهى $z' = 10 - 4i$ دەگۆرپىت.

شيكار

ئەگەر $M_z(x, y)$ و $M'_z(x', y')$ دوو خالى ژمارە ئاويتهى z و z' بن و k پرژەى هاوپرژەى ئەندازەيى بىت چەقەكهى خالى بنهپەت بىت و M_z بۆ M'_z بگۆرپىت، ئەوا $\begin{cases} 10 = k(-5) \\ -4 = k(2) \end{cases}$ لەمەوه دەردەچىت $k = -2$.

2. پرژەى هاوپرژەى ئەندازەيى بدۆزەوه كە چەقەكهى خالى بنهپەت بىت و خالى ژمارە ئاويتهى $z = 6 - 2i$ بۆ خالى ژمارە ئاويتهى $z' = 3 - i$ دەگۆرپىت.

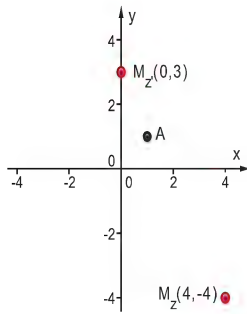


به سوود وەرگرتن لەوى پيشوو ئەوا گۆرپىنى خالى M به هاوپرژەيهكى ئەندازەيى چەقەكهى خالى بنهپەت و پرژەكهى ژمارەى راستى k بىت، دەگۆرپىتهوه بۆ ليكدانى M ژمارەى خالى M له ژمارە راستى k ودياركردنى خالى ژمارە ئاويتهى ئەنجام $z' = kz$ بهدوا نووسىنى $z' = kz$ دەوترىت شيوهى ئاويته بۆ ئەم هاوپرژە ئەندازەيهيه. شيوهى ئاويته بۆ هاوپرژەيهيهكى ئەندازەيى چەقەكهى خالى A و پرژەكهى ژمارەى راستى k بىت چەندە؟

نووسىنى ئاويته بۆ هاوپرژەيهكى ئەندازەيى

نووسىنى ئاويته بۆ هاوپرژەيهيهكى ئەندازەيى چەقەكهى خالى A و پرژەكهى ژمارەى راستى k بىت دەكاتە $z' - a = k(z - a)$ كاتيك $a = z_A$ ژمارەى ئاويتهيه بۆ خالى A .

نمونه 3

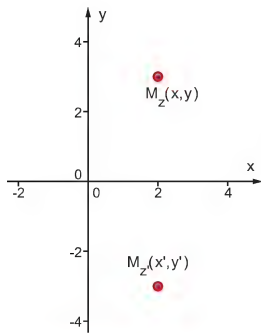


دۆزىنەۋەى وىنەى خاڭىك بە ھاورپژدەىكى ئەندازەى شىۋەى خاڭى $M(3, -3)$ بە ھاورپژدەىكى ئەندازەى چەقەكەى خاڭى $A(1, 1)$ و رپژدەىكى ژمارەىكى راستى $\frac{1}{2}$ - بىت بدۆزەۋە.

شىكار

بە M ۋىنەى M' كاتىك $a = z_A = 1 + i$ و $m = z_M = 3 - 3i$
 $m' - a = -\frac{1}{2}(m - a)$ ئەۋا $m' = z_{M'}$ ھاورپژدەى ئەندازەى ۋىنەى
 $m' = -\frac{1}{2}(m - a) + a = -\frac{1}{2}(3 - 3i - (1 + i)) + (1 + i) = 3i$
 كەۋاتە ۋىنەى خاڭى $M(3, -3)$ بە ھاورپژدەى ئەندازەى دەبىتە خاڭى $M'(0, 3)$.

3. ۋىنەى پىشۋو بەكاربەننە بۇ دۆزىنەۋەى ۋىنەى خاڭى $M(4, -4)$ بە ھاورپژدەى ئەندازەى چەقەكەى خاڭى $A(-1, -1)$ و رپژدەىكى ژمارەى راستى $\frac{1}{4}$ - بىت.



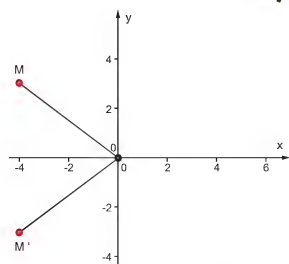
ژمارەى ئاۋل

لەبىرت بىت ژمارە ئاۋىتەى $z = x + iy$ ئاۋلى ژمارەى $\bar{z} = x - iy$ ئەگەر
 $M_z(x, y)$ خاڭى ژمارەى ئاۋىتەى z و $M'_z(x', y')$ خاڭى ژمارە ئاۋىتەى \bar{z} بىت،
 ئەۋا $\begin{cases} x' = x \\ y' = -y \end{cases}$ دەيسەلمىنىت كە M'_z ۋىنەى M_z بە ۋىنەدانەۋە بەدەۋرى تەۋەرى x .

لىكەدانەۋەى ئەندازەى بۇ ژمارەى ئاۋل

گواستەۋە لە ژمارەى ئاۋىتەى z بۇ ئاۋلەكەى \bar{z} خاڭى ژمارەى z بە ۋىنەدانەۋە بەدەۋرى تەۋەرى x جىگۆركى دەكات.

نمونه 4



شىۋەى خاڭى ژمارەى ئاۋىتەى بە ۋىنەدانەۋە بەدەۋرى تەۋەرى x ۋىنەى خاڭى ژمارەى ئاۋىتەى $z = -5(2 - i) - 2i(3i + 1)$ بە ۋىنەدانەۋە بەدەۋرى تەۋەرى x بدۆزەۋە.

شىكار

دەستىكە بە نووسىنى ژمارە ئاۋىتەكە بەشىۋەى جەبرى
 $z = -5(2 - i) - 2i(3i + 1) = -10 + 5i - 6(i^2) - 2i$
 $z = -4 + 3i$
 $M'_z(-4, 3)$ دەكاتە خاڭى ژمارە ئاۋىتەى z و خاڭى $M'_z(-4, 3)$ ۋىنەى خاڭەكەى بە ۋىنەدانەۋە بەدەۋرى تەۋەرى x .

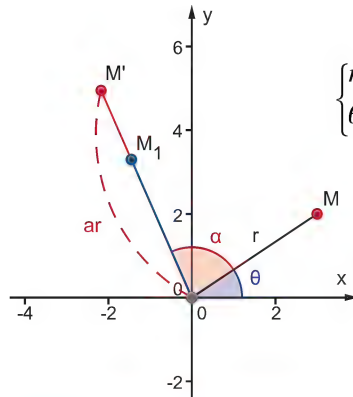
4. ۋىنەى خاڭى ژمارەى ئاۋىتەى $z = 3(-7i + 14)(8 - 11i)$ بە ۋىنەدانەۋە بەدەۋرى تەۋەرى x بدۆزەۋە.



لیکدانی ژماره ناوټهکان «بۆ تیروانین»

لیکدانهوهی ئەندازهیی بۆ لیکدانی دوو ژماره ناوټه زۆر ئالۆزتره له لیکدانهوهکانی پیشوو، لێرهدا شیوهی سیگۆشهی بهکاردهینین بۆ نووسینی ژماره ناوټهکان چونکه گه‌یشتن به ئەنجام ئاسانتر ده‌کات. با $u = a^{ia}$ ژماره‌یه‌کی ناوټه بێت به‌ها پروته‌که‌ی a و θ گۆشه‌ جهمسهریه‌که‌ی بێت. ئەگەر u له‌ژماره‌ی ناوټه‌ی $u = a^{ia}$ بده‌یت ئەمه‌ت ده‌ستده‌که‌وێت.

$$z' = zu = re^{i\theta} a e^{ia} = (ra) e^{i(\theta+\alpha)}$$



$$\begin{cases} r' = ar \\ \theta' = \theta + \alpha + 2k\pi \end{cases}$$

کاتی که $z' = r' e^{i\theta'}$ ئەگەر به‌وردی سه‌یری وێنه‌ی به‌رامبەر بکه‌یت ده‌بینیت جیگۆرکی له M_z و $M_{z'}$ به‌ دوو قوناغدا تێده‌په‌رێت: یکه‌میان M_z بۆ M_1 به‌ سوورانه‌وه‌یه‌ک چه‌قه‌که‌ی خالی بنه‌رپه‌ت وگۆشه‌که‌ی $\alpha = \arg(u)$ و دووه‌میان له M_1 بۆ $M_{z'}$ به‌هاورپێژیه‌ی ئەندازه‌یی چه‌قه‌که‌ی خالی بنه‌رپه‌ت وپێژه‌که‌ی $a = |u|$ بێت. «پروته‌ی ژماره‌ی ناوټه‌ی u »

لیکدانهوه‌ی ئەندازه‌یی بۆ لیکدانی ژماره ناوټه‌کان

لیکدانی ژماره‌ی ناوټه‌ی z له‌ ژماره‌ی ناوټه‌ی u بریتیه‌ له‌ جیگۆرکی خالی ژماره‌ z به‌سوورانه‌وه‌ چه‌قه‌که‌ی خالی بنه‌رپه‌ت وگۆشه‌که‌ی $\arg(u)$ بێت، پاشان به‌هاورپێژیه‌ی ئەندازه‌یی چه‌قه‌که‌ی خالی بنه‌رپه‌ت وپێژه‌که‌ی $|u|$ بێت.

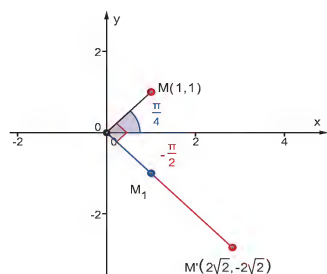
جیگۆرکی خال به‌به‌کاره‌ینانی لیکدانی ژماره ناوټه‌کان

دیاریبکه‌ که ده‌توانرێت ژماره ناوټه‌ی $z = 1 + i$ جیگۆرکی بکه‌یت بۆ خالی ژماره ناوټه‌ی $z' = 2\sqrt{2}(1 - i)$ به‌ سوورانه‌وه‌ چه‌قه‌که‌ی خالی بنه‌رپه‌ت پاشان به‌هاورپێژیه‌ی ئەندازه‌یی چه‌قه‌که‌ی خالی بنه‌رپه‌ت. گۆشه‌ سوورانه‌وه‌و پێژیه‌ی هاورپێژیه‌ی ئەندازه‌یی چنده‌؟

شیکار

دۆزینه‌وه‌ی ژماره‌یه‌کی ناوټه‌ی u به‌سه‌ بۆ ئەوه‌ی z' ده‌ستکه‌وێت ئەویش به‌هۆی لیکدانی z له $u = \frac{z'}{z}$ له‌به‌رئه‌وه‌ی u پێویسته‌ پاسادانی $z' = uz$ بکات و له‌به‌رئه‌وه‌ی $z \neq 0$ ئەوا $u = \frac{z'}{z}$ شیوه‌ی جهمسهری به‌کاربه‌ینه‌ بۆ نووسینی ژماره‌ی ناوټه‌که‌.

$z = re^{i\theta}$ و $z' = r' e^{i\theta'}$ بنوسه‌، پاشان به‌های پروت وگۆشه‌ی هه‌ردوو ژماره‌ی z و z' بدۆزه‌وه‌.



$$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \text{ و } \tan \theta = \frac{1}{1} = 1; |z| = |1 + i| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

$$\theta = \frac{\pi}{4} + 2m\pi$$

$$|z'| = |2\sqrt{2}(1 - i)| = 2\sqrt{2}|1 - i| = 2\sqrt{2}(\sqrt{2}) = 4$$

$$0 \leq \theta' \leq -\frac{\pi}{2} \text{ و } \tan \theta' = \frac{-1}{1} = -1$$

$$\theta' = -\frac{\pi}{4} + 2n\pi$$

$$|u| = \frac{|z'|}{|z|} = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2} \text{ له‌مه‌وه‌ش } |z'| = |z||u|$$

$$\arg(z') = \arg(u) + \arg(z)$$

لەدوايیدا

$$\arg(u) = \arg(z') - \arg(z) = \theta' - \theta = -\frac{\pi}{4} + 2n\pi - \frac{\pi}{4} - 2m\pi = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

$$k = n - m \text{ کاتیك}$$

کەواتە، گۆشەى سوپانەوه دەکاتە $-\frac{\pi}{2}$ و پێژەى هاو پێژەى ئەندازەى دەکاتە $2\sqrt{2}$.

5. دیاریبکە کە دەتوانریت خالى ژمارەى $z = 1 - i$ بۆ خالى ژمارەى $z' = \sqrt{2}(1 + i)$ جیگۆرکى بکړیت بە سوپانەوه یەک چەقەکەى خالى بنەرەت، پاشان بە هاو پێژەى کى ئەندازەى چەقەکەى خالى بنەرەت بێت، گۆشەى سوپانەوه و پێژەى هاو پێژەى ئەندازەى بدۆزەوه.



بەسوود وەرگرتن لەوهى پێشوو، دەتوانیت جیگۆرکى خالى M بکەیت بە سوپانەوه یەک چەقەکەى خالى بنەرەت بێت، لەرێگای لیکدانى ژمارەى خالى M لە ژمارەى کى ئاویتە بەهاى پروتەکەى 1 بێت. بەواتایە کى تر بۆ جیگۆرکى خالى M بە سوپانەوه چەقەکەى خالى بنەرەت و گۆشەکەى θ بێت، ژمارە ئاویتەى $m = z_M$ «ژمارەى خالى M » لە ژمارە ئاویتەى $e^{i\theta}$ بدە. (1 بەهاى روتى ژمارەکەى θ گۆشەى جەمسەرەکەى) خالى ژمارە ئاویتەى دۆزراوه دەکاتە $z' = e^{i\theta} z$ بە نووسینى $z' = e^{i\theta} z$ دەوتریت شێوهى ئاویتە Complex form بۆ سوپانەوه چەقەکەى خالى بنەرەت و گۆشەکەى θ بێت.

شیوهى ئاویتە بۆ سوپانەوه «بۆ تێپوانین»

نووسینى ئاویتە بۆ سوپانەوه چەقەکەى خالى A و گۆشەکەى θ بێت دەکاتە: $z' - a = e^{i\theta} (z - a)$ کاتیك $a = z_A$ ژمارە ئاویتەى بۆ خالى A .

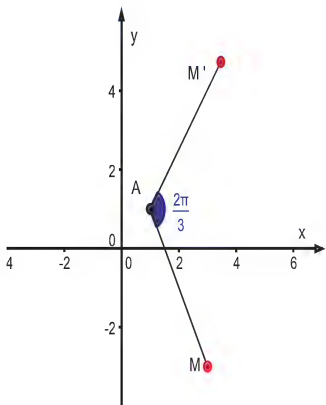
6 نموونه

شیوهى خالىک بە سوپانەوه

شیوهى خالى $M(3, -3)$ بە سوپانەوه چەقەکەى

خالى $A(1, 1)$ و گۆشەکەى $\frac{2\pi}{3}$ بێت بدۆزەوه.

شیکار



بە $a = z_A = 1 + i$ و $m = z_M = 3 - 3i$ شیوهى M بە

سوپانەوهى خالەکە، $M' = M_m$ کاتیك $m' - a = e^{i\theta} (m - a)$

$$\begin{aligned} m' &= e^{i\frac{2\pi}{3}} (3 - 3i - (1 + i)) + (1 + i) \\ &= \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right) (2 - 4i) + 1 + i \\ &= \left(-\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) (2 - 4i) + 1 + i = 2\sqrt{3} + i(3 + \sqrt{3}) \end{aligned}$$

شیوهى خالى $M(3, -3)$ بە سوپانەوه دەبێتە خالى $M' = (2\sqrt{3}, 3 + \sqrt{3})$.

6. شیوهى خالى $M(4, -4)$ بدۆزەوه بە سوپانەوه چەقەکەى $A(-1, -1)$

و گۆشەکەى $-\frac{\pi}{4}$ بێت.



دەتوانین سوود لە پەيوەندى نێوان ژمارە ئاویتەکان و خالەکانى پروتەختى پۆتانهکاندا وەرگیرین بۆ شیکارى پرسیاره ئەندازەى یان بۆ بەکارهێنانى هەندیک سەلمێنراو لەبارى ئەندازەى.

لہ راھینانی 1 تا کو 6 ژمارہ ئاویتہکە بو شیوہی خالی M بەجیگۆرکیی دیاریکراو بنووسە.

1 $M(2, -1)$ ؛ راکیشانی ئاراستەبەری $\vec{u} \langle -3, 2 \rangle$

2 $M(-3, 5)$ ؛ راکیشانی ئاراستەبەری $\vec{u} \langle 2, -2 \rangle$

3 $M(2, 0)$ ؛ سووپانەوہ چەقەکە ی خالی
بنەرەت و گۆشەکە ی $\frac{\pi}{3}$ بیت.

4 $M(2, 1)$ ؛ هاوپیژە ی ئەندازە یی پیژەکە ی $\frac{3}{2}$ بیت.

5 $M(-1, 3)$ ؛ وینەدانەوہ بەدەوری تەوہری x .

6 $M(4, 1)$ ؛ وینەدانەوہ بەدەوری تەوہری y .

229

ئامادەكارى بۇ تاقىكردنەو

1 بەشى راستى ژمارە ئاويتهى $z = (2+i)^2$ برىتييه له:

- 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐

2 بەشى خەيالى ژمارە ئاويتهى $z = (1-i)^2$ برىتييه له:

- 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐

3 بەهى روتى ژمارە ئاويتهى $z = 4 + 3i$ برىتييه له:

- 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐

4 كام لەم پيوانەى گوشانەى دین، گوشەى جەمسەرى ژمارە ئاويتهى $z = 2 - 2i$ بیت؟

- 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐

5 ژمارەيەكى ئاويته بەها روتەكەى 2 و گوشەى جەمسەرى دەكاتە $\frac{\pi}{3}$ كام لەمانەى دین نووسینی z بەشپوهى جەبرييه.

- 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐

6 كۆمەلەى شيكارى هاوكيشەى $z^2 + z + 1 = 0$ برىتييه له (لەبیرت بیت كه $(z^2 + z + 1)(z - 1) = z^3 - 1$)

- 1 ☐ كۆمەلەى بەتال .
2 ☐ $\left\{ -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \right\}$
3 ☐ $\left\{ \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \right\}$
4 ☐ $\left\{ \frac{-1+\sqrt{3}}{2}, \frac{-1-\sqrt{3}}{2} \right\}$

7 A و B دوو خالى دوو ژمارەى ئاويتهى $a = 1 + i$ و $b = 1 - i$ كام لەمانەى دین كۆمەلەى خالەكانى M كه پاسادانى $|z_M - 1 - i| = |z_M - 1 + i|$ دەكات.

- 1 ☐ راستەهيلي AB .
2 ☐ ناوهراستى AB .

- 3 ☐ بازنەيەكە تيرەكەى AB .
4 ☐ تەوهرى AB .

8 A, B, C خالەن له روتەختى پۆوتاندا كه پاسادانى $z_A = z_C - z_B$ كام لەمانەى دین راستە؟

- 1 ☐ $OACB$ لاتەريبيكە، O خالى بنەپتە.
2 ☐ خالەكانى A, B, C لەپىكى يەكترن.

- 3 ☐ ناوهراستى BC .
4 ☐ ناوهراستى AC .

9 A و B دوو خالى دوو ژمارەى ئاويتهى $a = 1 + i$ و $b = 3 - i$ كام لەمانەى دین راستە؟

- 1 ☐ $AB = 2.82$
2 ☐ $AB = 0$
3 ☐ $AB = \sqrt{10} - \sqrt{2}$
4 ☐ $AB = 2\sqrt{2}$

10 A و B دوو خالى دوو ژمارە ئاويتهى $a = 1 + i$ و $b = 3 - i$ و H ناوهراستى AB و $h = z_H$ كام لەمانەى دین راستە.

- 1 ☐ $h = 1 - i$
2 ☐ $h = 2$
3 ☐ $h = 2 - 2i$
4 ☐ $h = -2$

ھەندىك زانىارى پىۋىست بۇ خويندكار

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \sin^2 x = 1 - \cos^2 x \\ \cos^2 x = 1 - \sin^2 x \end{cases}$$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$\sin (x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$$

$$\sin (x - y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$$

$$\cos (x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

$$\cos (x - y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$$

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$= 1 - \sin^2 x$$

$$= \cos^2 x - 1$$

$$\sin^2 x = \frac{1}{2} (1 - \cos 2x)$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{2} (1 + \cos 2x)$$

$$\sin (-x) = -\sin x, \quad \cos (-x) = \cos x, \quad \tan (-x) = -\tan x$$

$$\sin \left(\frac{\pi}{2} - x \right) = \cos x, \quad \cos \left(\frac{\pi}{2} - x \right) = \sin x$$

$$\sin (\pi - x) = \sin x, \quad \cos (\pi - x) = -\cos x$$

